Die

Entfernungsörter

geradliniger Dreiecke.

Eine geometrische Abhandlung

von

Carl Friedr. Andr. Jacobi,

Professor in Pforta.

Jena,
bei Friedr. Frommann.

1851.

1. Schon lange kannte man die Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke, der zufolge die algebraische Summe der Entfernungen, welche ein Punkt in der Ebene eines solchen Dreiecks von dessen Seiten hat, eine unveränderliche und von der besondern Lage dieses Punktes unabhängige Grösse bildet — sie ist der Höhe des Dreiecks gleich — und wusste ausserdem, dass etwas ganz ähnliches in Beziehung auf regelmässige Tetraeder für Punkte im Raume gelte, ohne dass es gelingen wollte, diejenigen allgemeineren, für Dreiecke und Tetraeder jeglicher Art geltenden Lehrsätze zu ermitteln, welche die eben genannten Beziehungen als besondere Fälle in sich schliessen. Je natürlicher und unwillkührlicher aber die Frage nach dieser Verallgemeinerung sich jedem darbieten musste, der mit der in Rede stehenden Eigenschaft der beiden regelmässigen Raumgebilde sich beschäftigte, desto grösser mag die Zahl derer gewesen sein, welche die Antwort auf diese Frage gesucht haben, ohne sie zu finden. Wenigstens ist, wie schon bemerkt wurde, geraume Zeit hindurch von einem Erfolge dieses Suchens nichts bekannt geworden. Und in der That darf diese Erscheinung nicht eben sehr befremden. Denn obschon es wahr ist, dass die Art und Weisse, wie die meisten allgemeinen Eigenschaften der Dreiecke für gleichseitige sich vereinfachen — nämlich dadurch, dass zwei oder mehrere für ungleichseitige Dreiecke von einander getrennt liegende Punkte bei gleichseitigen in einen einzigen zusammenfallen — dass diese Art und Weise, sage ich, auch in unserem Falle sich wiederfindet, so gehören doch die Punkte, um die es sich hier handelt, nicht zu denen, welche auch bei andern Untersuchungen über Dreiecke eine hervortretende Rolle spielen, und darum gewöhnlich den Namen der merkwürdigen Dreieckspunkte führen. Kein Wunder daher, wenn sie sich selbst einem wiederholten Nachforschen zu entziehen wussten, wie ich unmittelbar durch eigne Erfahrung mich zu überzeugen Gelegenheit gehabt habe.

2. Einem Mathematiker Belgiens gelang es, so viel mir bekannt, zuerst, unserm allgemeinen Lehrsatz auf die Spur zu kommen. In dem 18. Bande der geschätzten französischen Zeitschrift*) welche der wackere Herausgeber J. D. Gergonne fast ein Vierteljahrhundert ohne Unterbrechung fortführte, die aber, wahrscheinlich in Folge der grossen politischen Erschütterungen, im Sommer des Jahres 1830 mit den beiden ersten Heften des 22. Bandes einging und später durch das

*) Annales de Mathematiques pures et appliquées, recueil periodique redigé et publié par I. D. Gergonne.

Journal de Mathem. pures et appliquées etc. par J. Liouville ersetzt wurde, erschien unter dem Titel

Problèmes et théorèmes sur les polygones et sur les polyèdres

eine Abhandlung, in welcher M. A. Timmermanns, damals Professor am Athenäum zu Doornick, für Dreiecke und Tetraeder die Eigenschaft nachwies, welche die Verallgemeinerung der gleich anfangs erwähnten Beziehungen bildet. Da aber die Abhandlung überhaupt mehr kurze Andeutungen als Ausführungen enthält, und manche Seite des Gegenstandes sogar ganz unberührt lässt, so erscheint eine ausführlichere Behandlung desselben auch jetzt noch nichts weniger als überflüssig, zumal da mit Grund anzunehmen ist, dass selbst unter denen, für welche der Gegenstand unmittelbares Interesse hat, gar mancher sich befindet, dem die Timmermanns'sche Abhandlung nicht zu Gesicht gekommen ist.

Ich will daher die Gelegenheit, welche mir die diesjährige Feier des Siftungsfestes unserer Landesschule darbietet, benutzen, diese ausführlichere Behandlung des Gegenstandes vorzunehmen und denselben wenigstens für die Dreiecke zu einem gewissen Abschluss zu bringen. Dabei darf ich hoffen, das in den Anhängen zu van Swinden bereits von mir gelieferte, zu umfassenden und gründlichen Uebungen in der Geometrie bestimmte Material zu vermehren und somit Lehrenden wie Lernenden einen nützlichen Dienst zu erweisen.

3. Aber mich leitete bei dieser Wahl des Gegenstandes für das diesjährige Festprogramm unserer Pforta noch eine andere Rücksicht. Ich wünschte nämlich zugleich auch demjenigen Zwecke solcher Schulschriften gerecht zu werden, welchen man ohne Zweifel vorzugsweise im Auge hatte, als man vor einem Vierteljahrhundert die Gymnasien unserer Monarchie zu einer regelmässigen Herausgabe derselben verpflichtete. Aus der grossen und nichts weniger als immer glücklichen Abgeschiedenheit, in welcher unsere Lehranstalten sich früherhin befanden, sollten sie heraus und der Oeffentlichkeit und dem Leben näher treten. Um ihnen mehr und mehr die allgemeine Theilnahme zuzulenken, welche sie als Bildungsstätten der Jugend und somit als Anstalten, auf denen im wahrsten und vollsten Sinne des Wortes die Hoffnungen des Vaterlandes beruhen, unbestritten verdienen, sollten sie selbst dazu mitwirken, dass ihre Einrichtungen und Bestrebungen auch in weitern Kreisen näher bekannt würden, sollten sie von Zeit zu Zeit eine so viel als möglich vollständige Rechenschaft über ihr gesammtes Thun und Treiben öffentlich ablegen.*)

In genügender Weise lässt sich aber offenbar dieser Zweck nicht erreichen, ohne dass die Schule den ausser ihr Stehenden eine so viel als möglich vollständige Einsicht gestattet nicht nur in das zur Entwickelung und Uebung der Kraft des jugendlichen Geistes angewandte Material selbst, sondern auch und ganz vorzüglich in die Art und den Geist seiner Behandlung. Daher

*) Es wäre gewiss von besonderem Interesse, auf Grund der bisherigen Erfahrungen eine wahrheitsgetreue Antwort zu geben zu suchen auf die Frage: Ob und in wie weit dieser Zweck durch die bisherigen Programme erreicht worden ist? Und wenn diese Frage wenigstens nicht unbedingt bejaht werden könnte, den Umständen nachzuforschen, die hierbei als schädlich gewirkt haben.

besteht schon seit längerer Zeit die Bestimmung, dass die für die obern Classen gegebenen Themata zu deutschen und lateinischen Aufsätzen in den Programmen bekannt gemacht werden.

Man kann es nur bedauern, dass für die Mathematik nicht etwas ähnliches geschieht, und freilich nicht wohl geschehen kann, theils weil regelmässige und ausführliche Arbeiten für diesen Lehrgegenstand noch nicht an allen Gymnasien eingeführt sind, theils weil es selten möglich sein würde, die Themata zu denselben in der erforderlichen Kürze anzugeben, ohne ein volles Verständniss und eine richtige Würdigung derselben ausnehmend zu erschweren oder ganz unmöglich zu machen.

An unserer Landesschule bestehen solche Arbeiten. Den Stoff zu mehreren derselben, die den Mitgliedern der ersten Classe theils schon vor einer Reihe von Jahren, theils in der jüngsten Vergangenheit aufgegeben wurden, bildete die Verallgemeinerung der mehr erwähnten Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke. Die nachfolgende Abhandlung soll daher auch dazu dienen, — ich bitte diesen Gesichtspunkt bei der Würdigung des Ganzen nicht zu übersehen — dass der Leser wenigstens im Allgemeinen sich ein Urtheil über Kern und Wesen solcher Arbeiten bilde. Ich sage, im Allgemeinen; denn manche Aenderung an dem ursprünglich zur Bearbeitung aufgestellten Material brachte theils die Natur der Sache, theils eine nochmalige Ueberarbeitung des Gegenstandes mit sich.

Dieser letztgenannte Zweck meiner Arbeit war es auch, der den Ausschlag dafür gab, dass ich mich bei ihr nicht, wie bei den beiden frühern von mir verfassten Festprogrammen der lateinischen sondern der Muttersprache bediente.

---

4. Nimmt man auf zwei Seiten AC und BC eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 1) die Segmente AE, BD von gleicher Länge mit der dritten Seite AB, zieht die unbegränzte, durch die Punkte D, E bestimmte Gerade QDES und fällt von einem beliebigen Punkt derselben, N, auf die Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen die Senkrechten NK, NL, NO, so ist, wenn wir den Inhalt des Vierecks ABDE durch V bezeichnen,

$$V = NAB + NAE - NBD$$
$$= \frac{c}{2}(NO + NL - NK)$$

also

$$NL + NO - NK = \frac{2V}{c}$$

Da nun offenbar sowohl der Inhalt des Vierecks ABDE als auch die Länge der Seite c nicht die geringste Veränderung durch ein Fortrücken des Punktes N auf der Geraden QS erleidet, so ist klar, dass, wie sehr auch die einzelnen Senkrechten NK, NL, NO ihre Grösse und Lage mit der Lage von N ändern mögen, das Aggregat aller drei Linien sich niemals ändert, eben weil es der Geraden gleich ist, welche durch $\frac{2V}{c}$ dargestellt wird.

Wir erhalten demnach den Lehrsatz:

Nimmt man auf zwei Dreiecksseiten und zwar von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus Segmente von gleicher Grösse mit der dritten Seite, so ist die durch die beiden auf jenen erstern Seiten erhaltenen Punkte bestimmte Gerade in ihrer unbegränzten Länge der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, für welche das Aggregat ihrer Entfernungen von den Dreiecksseiten eine unveränderliche Grösse bildet.

Anmerkung. Um der nöthigen Kürze willen mag eine solche Gerade künftig den Namen *Entfernungsort* führen.

5. Neben dieser Unabhängigkeit von der besondern Lage des Punktes N auf QS, welche das Aggregat unserer drei Senkrechten behauptet, findet, wie bereits angedeutet worden, auch eine Abhängigkeit Statt, nämlich der einzelnen Senkrechten, und zwar nicht blos hinsichtlich ihrer Grösse, sondern auch hinsichtlich ihrer Lage und somit des Vorzeichens, das sie als Glieder des Aggregates führen.

Es können aber alle drei Senkrechte additiv sein, oder zwei, oder endlich nur eine einzige.

Die Regel, nach welcher die Lage des Punktes N auf QS hierüber entscheidet, ist einfach. Unterscheidet man bei jeder Dreiecksseite eine innere und eine äussere Flanke oder Kante — um den hier zweideutigen Ausdruck Seite zu vermeiden — und versteht unter jener die den beiden andern Seiten zugewendete, unter dieser die ihnen abgewendete, so lässt sich unsere Regel also aussprechen:

Jede Senkrechte ist additiv, deren zugehörige (auf ihr senkrecht stehende) Seite den Punkt N auf ihrer innern Flanke hat, subtractiv im entgegengesetzten Fall.

Verlängert man daher jede der Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 2) über beide Endpunkte hinaus, so wird dadurch die ganze Dreiecksebene in sieben Felder getheilt, die sich eben durch die den einzelnen Senkrechten zukommenden Vorzeichen von einander unterscheiden. Das von dem Dreieck ABC selbst gebildete Feld ist dasjenige, innerhalb dessen der Punkt N liegen muss, wenn alle drei Senkrechte einerlei Vorzeichen haben sollen, und somit am natürlichsten additiv genommen werden. Die drei Felder ZBCU, VCAW und XABY sind diejenigen, wo je eine Senkrechte substractiv ist, im ersten nämlich NK, im zweiten NL, im dritten NO; in jedem der drei noch übrigen Felder endlich sind zwei Senkrechte subtractiv, und zwar für UCV die beiden NK und NL, für YBZ die beiden NK und NO, und für XAW die beiden NL und NO.

Anmerkung. Es lässt sich auch an diesem Beispiel dem Anfänger anschaulich machen, dass der Gebrauch subtractiver Grössen lediglich dazu dient, die nöthige Allgemeinheit zu erlangen.

6. Es ist leicht zu sehen, wie die Eingangs erwähnte Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke ein besonderer Fall des in (4) entwickelten Lehrsatzes ist. Denn wird AB = AC = BC, so fallen offenbar die den Entfernungsort bestimmenden Punkte D und E mit C, der Gegenecke von AB, zusammen. Jetzt also können alle die unendlich vielen Geraden, die sich durch C ziehen lassen, als Entfernungsörter angesehen werden, oder mit andern Worten, die ganze Dreiecksebene ist der geometrische Ort für Punkte von der in Rede stehenden Beschaffenheit. Das bisherige

Viereck ABDE geht jetzt in das Dreieck ABC über; die algebraische Summe unserer drei Senkrechten ist darum $= \frac{2\triangle}{c}$ d. h. gleich der Dreieckshöhe.

7. Die meisten Eigenschaften gleichseitiger Dreiecke haben als Vereinfachungen und somit Abschwächungen inhaltsvollerer Beziehungen ungleichseitiger Dreiecke das mit einander gemein, dass man zu einer und derselben von ihnen gelangen kann, indem man von verschiedenen und zwar oft recht merklich unter einander verschiedenen Beziehungen nicht regelmässiger Dreiecke ausgeht. Dieser Umstand hat in der Natur der Sache selbst seinen Grund. Denn in jenen Vereinfachungen muss ja nothwendig Alles abgestreift werden, was seinen Grund und Halt in der Verschiedenheit der Seiten und Winkel und der vielen davon abhängigen andern Linien, Winkel und Punkte hat, und es können darum, wie jedermann sieht, zwei und mehrere Sätze durch eine solche Abschwächung ihres Inhaltes gerade das verlieren, wodurch sie bisher von einander verschieden waren.

Auch auf unsere in Rede stehende Eigenschaft gleichseitiger Dreiecke findet das eben Gesagte Anwendung. Denn es giebt für sie nicht blos die eine bisher näher entwickelte Verallgemeinerung, sondern wenigstens noch eine zweite, welche eine nähere Erwähnung verdient.

Ist nämlich N ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC (Fig. 3), bezeichnet man dessen Entfernungen NK, NL, NO von den Seiten a, b, c beziehungsweise durch $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, die zu den einzelnen Dreiecksseiten gehörigen Höhen durch $h_{,}$, $h_{,,}$, $h_{,,,}$, so ist:

$$\frac{p_{,}}{h_{,}} = \frac{\triangle BNC}{\triangle ABC},\ \frac{p_{,,}}{h_{,,}} = \frac{\triangle CNA}{\triangle ABC},\ \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} = \frac{\triangle ANB}{\triangle ABC},\ \text{also}$$

$$\frac{p_{,}}{h_{,}} + \frac{p_{,,}}{h_{,,}} + \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} = \frac{\triangle BNC + \triangle CNA + \triangle ANB}{\triangle ABC} = \frac{\triangle ABC}{\triangle ABC} = 1$$

und wir erhalten so den

Lehrsatz: Das Aggregat der drei Quotienten, die man erhält, wenn man die Entfernungen eines beliebigen Punktes in der Ebene eines Dreiecks von dessen Seiten einzeln durch die zu eben diesen Seiten gehörigen Dreieckshöhen dividiert, ist der Einheit gleich.

Anmerkung 1. Nennen wir der nöthigen Kürze halber einen solchen Quotienten, weil er aus zwei Linien gebildet ist, die auf einer Dreiecksseite senkrecht oder normal stehen, den zu dieser Seite gehörigen *Normalquotienten*, so kann man unsern Lehrsatz einfacher also aussprechen: Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks einen beliebigen Punkt, so ist das Aggregat der Normalquotienten seiner drei Seiten der Einheit gleich, bildet also eine constante, von der besondern Lage des Punktes unabhängige Grösse.

Anmerkung 2. Ueber die Vorzeichen der einzelnen Quotienten entscheidet die Lage des Punktes N in der Weise, die wir vorher (5) ausführlich erörtert haben.

Anmerkung 3. Ohne alle nähere Erläuterung sieht man ein, dass für ein gleichseitiges Dreieck unser Satz dahin ausgesprochen werden kann: Das Aggregat der Entfernungen des Punktes N von den Seiten des Dreiecks ist gleich dessen Höhe.

Anmerkung 4. Von selbst ergeben sich aus unserem Satz die beiden bekannten Beziehungen:

a) Zieht man in einem Dreieck drei Transversalen, welche einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so ist das Aggregat der drei Quotienten, die man erhält wenn man die untern Abschnitte durch die zugehörigen ganzen Transversalen dividiert, gleich der Einheit.

b) Doppelt so gross als das genannte Aggregat ist dasjenige, welches entsteht, wenn man da, wo bisher die untern Abschnitte standen, durchweg die zugehörigen obern setzt.

Anmerkung 5. Nähere Beachtung verdient die Verschiedenheit der beiden zuletzt genannten Ternionen von Quotienten hinsichtlich der Bestimmung der Vorzeichen ihrer einzelnen Glieder. Für die unteren d. h. diejenigen Quotienten, deren Zähler die untern Abschnitte der Transversalen bilden, ist die Regel, nach der sich das Vorzeichen jedes Gliedes bestimmt, durchaus dieselbe wie für die Normalquotienten (Anmerk. 1) und die einzelnen Senkrechten einer zu einem Entfernungsorte gehörigen Ternion.

Nicht so ist es bei den Quotienten, wo die obern Abschnitte der Transversalen erscheinen, und die man darum obere nennen könnte. Hier gewinnt man die nach den Vorzeichen der einzelnen Glieder verschiedenen Felder (5) nicht durch die Dreiecksseiten und deren Verlängerungen, sondern durch diejenigen Geraden, welche man mit diesen Seiten parallel durch deren Gegenecken zieht. Es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit dieser Bestimmung zu überzeugen und darum eine nähere Erörterung, um sie zu begründen, überflüssig.

8. Der in dem vorhergehenden Paragraph mitgetheilte Lehrsatz scheint bisher nicht die Beachtung gefunden zu haben, die er verdient. Mehrere freilich schon auf andern Wegen gefundene Beziehungen lassen sich durch seine Hülfe ungemein leicht und einfach herleiten.

Wir wollen dies an einigen Beispielen nachweisen.

a. Fällt der Punkt N zusammen mit dem Mittelpunkt des innern Kreises, dessen Radius r ist, so giebt unser Satz sofort

$$\frac{r}{h_{,}} + \frac{r}{h_{,,}} + \frac{r}{h_{,,,}} = 1, \text{ also } \frac{1}{r} = \frac{1}{h_{,}} + \frac{1}{h_{,,}} + \frac{1}{h_{,,,}}$$

d. h. in jedem Dreieck ist der reciproke Werth vom Radius des innern Berührungskreises so gross als die Summe der reciproken Werthe von den drei Dreieckshöhen.

b. Liegt dagegen N in dem Mittelpunkte des zur Seite a gehörigen äussern Berührungskreises, dessen Radius r', so haben wir, wie man ohne alle weitere Erläuterung sieht,

$$-\frac{r'}{h_{,}} + \frac{r'}{h_{,,}} + \frac{r'}{h_{,,,}} = 1, \text{ also } \frac{1}{r_{,}} = -\frac{1}{h_{,}} + \frac{1}{h_{,,}} + \frac{1}{h_{,,,}}$$

und in ganz ähnlicher Weise erhält man, wenn r'' und r''' die Radien der zu den Seiten b und c gehörigen äussern Berührungskreise bezeichnen,

$$\frac{1}{r_{,,}} = \frac{1}{h_{,}} - \frac{1}{h_{,,}} + \frac{1}{h_{,,,}}$$

$$\frac{1}{r_{,,,}} = \frac{1}{h_{,}} + \frac{1}{h_{,,}} - \frac{1}{h_{,,,}}$$

d. h. der reciproke Werth vom Radius eines äussern Berührungskreises ist so gross als der Ueberschuss von der Summe der reciproken Werthe von den beiden Höhen der nicht zugehörigen Seiten über den reciproken Werth der dritten.

c. Daher ist auch:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_{,}} + \frac{1}{r_{,,}} + \frac{1}{r_{,,,}}$$

d. h. der reciproke Werth vom Radius des innern Berührungskreises ist so gross als die Summe der reciproken Werthe von den Radien der drei äussern.

d. Fällt N zusammen mit dem Mittelpunkt des äussern Kreises, dessen Radius R, so ist unserem Satze zufolge:

$$\frac{R \cdot \cos A}{h_{,}} + \frac{R \cos B}{h_{,,}} + \frac{R \cos C}{h_{,,,}} = 1$$

und demnach, da, wie bekannt,

$$h_{,} = 2\ R \sin B \sin C \text{ etc.}$$

auch

$$\frac{2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C}{4 \sin A \sin B \sin C} = 1$$

oder

$$\sin 2\ A + \sin 2\ B + \sin 2\ C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

e. Ist N der Höhendurchschnitt des Dreiecks, so hat man

$$\frac{2\ R \cos B \cos C}{2\ R \sin B \sin C} + \frac{2\ R \cos A \cos C}{2\ R \sin A . \sin C} + \frac{2\ R \cos A \cos B}{2\ R \sin A \sin B} = 1$$

oder

$$\text{cotg } A \text{ cotg } B + \text{cotg } A \text{ cotg } C + \text{cotg } B \text{ cotg } C = 1$$

und hieraus durch Multiplication mit

$$\text{tg } A \,.\, \text{tg } B \,.\, \text{tg } C$$

$$\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A \,.\, \text{tg } B \,.\, \text{tg } C \,.$$

f. Hat N eine solche Lage, dass (Fig 4)

$$N\hat{A}B = N\hat{B}C = N\hat{C}A = \alpha$$

(N bildet in diesem Falle den gemeinsamen Durchschnitt der Peripherieen derjenigen drei Kreise, von denen der eine die Seite a zur Sehne und b zur Tangente, der andere b zur Sehne und c zur Tangente, der dritte c zur Sehne und a zur Tangente hat)

so ist

$$p_{,} = NK = NB \sin \alpha$$
$$p_{,,} = NL = NC \,.\, \sin \alpha$$
$$p_{,,,} = NO = NA \,.\, \sin \alpha,$$

also

$$\frac{NB \,.\, \sin \alpha}{h_{,}} + \frac{NC \,.\, \sin \alpha}{h_{,,}} + \frac{NA \,.\, \sin \alpha}{h_{,,,}} = 1$$

und

$$\frac{NB}{h_{,}} + \frac{NC}{h_{,,}} + \frac{NA}{h_{,,,}} = \text{cosec}\alpha \quad (1)$$

Nun ist aber

$$NB = c \,.\, \frac{\sin \alpha}{\sin ANB} = c \,.\, \frac{\sin \alpha}{\sin B}$$

$$NC = a \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin BNC} = a \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin C}$$

$$NA = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin CNA} = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin A}$$

Demgemäss verwandelt sich unsere Gleichung (1) in

$$\frac{a}{h_{,,} \cdot \sin C} + \frac{b}{h_{,,,} \cdot \sin A} + \frac{c}{h_{,} \cdot \sin B} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

oder nach bekannten Beziehungen, in

$$\frac{2 R \sin A}{2 R \sin A \sin^2 C} + \frac{2 R \sin B}{2 R \sin^2 A \cdot \sin B} + \frac{2 R \sin C}{2 R \sin^2 B \sin^2 C} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

das ist

$$\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (2)$$

Und hieraus

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 A + 1 + \operatorname{cotg}^2 B + 1 + \operatorname{cotg}^2 C$$

oder

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cotg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C + 2$$
$$= (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)^2$$ wegen

der in (e) nachgewiesenen Beziehung,
also

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \quad (3)$$

Anmerkung. Die beiden in den Gleichungen (2) und (3) dargestellten bemerkenswerthen Beziehungen zwischen dem Winkel α und den Dreieckswinkeln fand zuerst der bekannte Herausgeber des Journal's für Mathematik, A. L. Crelle und machte sie bekannt in der Schrift: Ueber einige Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Berlin 1816.

Welche wesentlichen Dienste zur Vereinfachung des Beweises für diese Eigenschaft der Dreiecke unser Satz gewährt, wird man am besten ermessen können, wenn man den vorstehenden Beweis mit dem in der genannten Schrift (pag. 14 sqq) befindlichen vergleicht.

g. AN werde verlängert bis zum Durchschnitt mit BC in G; setzen wir $BG = a'$, $CG = a''$, $B\hat{A}G = A'$, $C\hat{A}G = A''$, behalten aber für NL und NO die bisherige Bezeichnung $p_{,,}$ und $p_{,,,}$ bei und nehmen endlich an, dass $a' : a'' = m : n$ sei.

Einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke zufolge ist nun;

$$p_{,,,} : p_{,,} = \sin A' : \sin A'' = a' b : a'' c$$
$$= m n a' b : m n a'' c$$
$$= m b : n c,$$ also auch

$$\frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} : \frac{p_{,,}}{h_{,,}} = m b \cdot h_{,,} : n c h_{,,,} = 2 m \triangle : 2 n \triangle$$
$$= m : n$$
$$= a' : a''$$

und wir gewinnen so den

Lehrsatz: Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks einen beliebigen Punkt, so verhalten sich die zu ihm gehörigen Normalquotienten je zweier Seiten wie die diesen beiden Seiten anliegenden Segmente, in welche die dritte Seite durch die Gerade getheilt wird, welche die Gegenecke dieser Seite mit dem in Rede stehenden Punkt verbindet.

h. Durch Hülfe des eben ausgesprochenen Satzes lassen sich manche Aufgaben leicht lösen, die ohne seine Anwendung mancherlei Schwierigkeiten darbieten würden.

Würde z. B. verlangt, man sollte in der Ebene eines Dreiecks den Punkt finden, für welchen die Normalquotienten der drei Dreiecksseiten in einer solchen gegenseitigen Beziehung stehen, dass der eine n mal so gross als die beiden andern zusammen und von den letztern der eine r mal so gross als der andere.

Sollte also

$$\frac{p_{,}}{h_{,}} = n\left(\frac{p_{,,}}{h_{,,}} + \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}}\right)$$

und

$$\frac{p_{,,}}{h_{,,}} = r \cdot \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}}$$

sein, so nehme man den Punkt G (Fig. 3) auf BC so, dass $BG = \frac{1}{r+1} \cdot BC$, ziehe AG und nehme auf dieser N so, dass $AN = \frac{1}{n+1} \cdot AG$. In N hat man den gesuchten Punkt.

Denn es ist:

$$\frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} : \frac{p_{,,}}{h_{,,}} = BG : GC = 1 : r \text{ . ferner}$$

$$\frac{p_{,}}{h_{,}} = \frac{GN}{GA} = \frac{n}{n+1}, \text{ also}$$

$$\frac{n}{n+1} + r \cdot \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} + \cdot \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} = 1, \text{ mithin}$$

$$(r+1)\frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \text{ und darum}$$

$$\frac{p_{,,,}}{h_{,,,}} = \frac{1}{(n+1)(r+1)}$$

$$\frac{p_{,,}}{h_{,,}} = \frac{r}{(n+1)(r+1)}$$

$$\left(\frac{p_{,,}}{h_{,,}} + \frac{p_{,,,}}{h_{,,,}}\right) = \frac{n(r+1)}{(n+1)(r+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{p_{,}}{h_{,}}.$$

i. Die drei Transversalen AD, BE, CF (Fig. 5), welche durch die Berührungspunkte des innern Berührungskreises bestimmt werden, haben bekanntlich einen gemeinsamen Durchschnittspunkt; bezeichnet man die zu diesem Punkt N gehörigen Normalquotienten der drei Seiten a, b und c beziehungsweise durch $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$, so ist weil $AE = AF = \frac{1}{2}(-a + b + c)$ etc.

$$q_{,,} : q_{,} = -a + b + c : a - b + c$$

$$q_{,,,} : q_{,,} = a - b + c : a + b - c$$

$$q_{,,,} + q_{,,} : q_{,,} = 2a : a + b - c$$

$$q_{,,,} + q_{,,} : q_{,} = 2a(-a + b + c) : (a - b + c)(a + b - c)$$

$$q_{,,,} + q_{,,} + q_{,} : q_{,} = 2a(-a + b + c) + (a - b + c)(a + b - c) : (a - b + c)(a + b - c)$$

also

$$\frac{1}{q_{,}} = 1 + \frac{2a(-a + b + c)}{(a - b + c)(a + b - c)}, \text{ und in ähnlicher Weise}$$

$$\frac{1}{q_{,,}} = 1 + \frac{2b(a - b + c)}{(-a + b + c)(a + b - c)}$$

$$\frac{1}{q_{,,,}} = 1 + \frac{2c.(a + b - c)}{(-a + b + c)(a - b + c)}, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{q_{,}} + \frac{1}{q_{,,}} + \frac{1}{q_{,,,}} = 3 + \frac{2a(-a + b + c)^2 + 2b(a - b + c)^2 + 2c(a + b - c)^2}{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Nun ist aber:

$$a(-a + b + c)^2 + b(a - b + c)^2 + c(a + b - c)^2 = 4abc - (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c),$$

demnach

$$\frac{1}{q_{,}} + \frac{1}{q_{,,}} + \frac{1}{q_{,,,}} = 3 + \frac{8abc - 2(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

$$= 3 + \frac{8abc(a + b + c)}{16\triangle^2} - 2$$

$$= 1 + \frac{abc}{\triangle} . \frac{a + b + c}{2\triangle} = 1 + 4R . \frac{1}{r}$$

$$= \frac{r + 4R}{r}$$

und weil in jedem Dreieck

$$r + 4R = r' + r'' + r'''$$

$$\text{so ist: } \frac{1}{q_{,}} + \frac{1}{q_{,,}} + \frac{1}{q_{,,,}} = \frac{r' + r'' + r'''}{r}$$

d. h. in jedem Dreieck ist für den Punkt, in welchem sich die durch die Berührungspunkte des innern Kreises bestimmten Transversalen schneiden, die Summe der reciproken Werthe von den Normalquotienten der drei Seiten so gross als der Quotient, den man erhält, wenn man die Summe der Radien von den drei äussern Berührungskreisen durch den Radius des innern dividiert.

k. Nimmt man (Fig. 5) BD′ = CD, CE′ = AE und AF′ = BF, so bilden bekanntlich D′, E′, F′ die Punkte, in denen die einzelnen Dreiecksseiten von den ihnen zugehörigen äussern Berührungskreisen berührt werden; die Transversalen AD′, BE′, CF′ haben auch einen gemeinsamen Durchschnittspunkt. Nennt man für diesen Punkt N′ die Normalquotienten der Dreiecksseiten $_{,}q$, $_{,,}q$ und $_{,,,}q$, so ist:

$$_{,,}q : {_{,}q} = a - b + c : - a + b + c$$

$$_{,,,}q : {_{,,}q} = a + b - c : a - b + c$$

$$_{,,,}q + {_{,,}q} : {_{,,}q} = 2a : a - b + c$$

$$_{,,,}q + {_{,,}q} : {_{,}q} = 2a : - a + b + c$$

$$_{,,,}q + {_{,,}q} + {_{,}q} : {_{,}q} = a + b + c : - a + b + c, \text{ also}$$

$$_{,}q = \frac{- a + b + c}{a + b + c}, \text{ und daher}$$

$$_{,,}q = \frac{a - b + c}{a + b + c}$$

$$_{,,,}q = \frac{a + b - c}{a + b + c}, \text{ darum}$$

$$_{,}q \cdot {_{,,}q} \cdot {_{,,,}q} = \frac{(- a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)^3}$$

$$= \frac{16 \triangle^2}{(a + b + c)^4}$$

$$= \left(\frac{2r}{a + b + c}\right)^2$$

d. h. Für denjenigen Punkt N′ in der Ebene eines Dreiecks, in welchem sich die Transversalen schneiden, welche durch die Punkte bestimmt werden, die die Dreiecksseiten mit den Peripherieen ihrer äussern Berührungskreise gemein haben, sind die drei Normalquotienten so beschaffen, dass ihr Produkt gleich ist dem Quadrat des Quotienten, den man erhält, wenn man den Durchmesser des innern Kreises durch den Dreiecksumfang dividiert.

Anmerkung 1. Zwei solche Punkte wie N und N', (Fig. 5) die beide Durchschnittspunkte von solchen Transversalenternionen sind, von denen die eine aus der andern dadurch hergeleitet ist, dass man die Seitensegmente a', a'' unter einander vertauscht, eben so b', b'' und c', c'', wollen wir einander zugeordnete oder zu einander gehörige Punkte nennen.

Anmerkung 2. Man könnte die Punkte N und N' noch näher als solche bezeichnen, die in Beziehung auf die Seitensegmente einander zugeordnet sind, um sie von denen zu unterscheiden, für welche etwas ähnliches hinsichtlich der Winkelsegmente gilt. Punktenpaare der letztern Art bilden die gemeinsamen Durchschnittspunkte von je zwei solchen Transversalenternionen, von denen die eine aus der andern dadurch hergeleitet worden ist, dass bei letzteren in ähnlicher Weise, wie man vorhin die Seitensegmente a', a'' etc. vertauschte, die Winkelsegmente A', A'' etc. vertauscht worden sind. Dass die so entstandene zweite Ternion in allen Fällen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben muss, wo die erste ihn hat, ist eine bekannte Eigenschaft der Dreiecke. Der Mittelpunkt des äussern Kreises und der Höhendurchschnitt jedes Dreiecks bilden ein Paar solcher Punkte — Gegenpunkte mögen sie der Kürze halber heissen. — Eine nicht geringe Anzahl der zum Theil interessantesten Eigenschaften dieser beiden Punkte kommen ihnen als Gegenpunkte zu. Man hat diesen Umstand bisher zu wenig beachtet.

Anmerkung 3. Die Gegenpunkte verdienen diesen ihren Namen auch darum, weil ein gewisser Gegensatz zwischen ihnen immer stattfindet.

Dies gilt namentlich für ihre Entfernungen von den Dreiecksseiten. Das Verhältniss dieser Entfernungen von zwei Seiten ist für den einen von zwei Gegenpunkten stets das umgekehrte oder entgegengesetzte von dem für den andern. In einzelnen Fällen greift dieser Gegensatz noch weiter wie z. B. bei dem Schwerpunkt und seinem Gegenpunkt. Denn während jener, wie schon L'Huilier in der gehaltreichen Schrift:

De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, Varsaviae 1782 pag. 50 sqq.

gezeigt hat, derjenige Punkt in der Ebene eines Dreiecks ist, für welchen die Quadratsumme seiner Entfernungen von den Ecken ein Kleinstes ist, gilt, wie später gefunden wurde, dasselbe für die Quadrate der Entfernungen des Gegenpunktes von den Dreiecksseiten.

Ein einfacher Elementarbeweis dieses letzteren Satzes ist folgender:

Es sei S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 7a), S' sein Gegenpunkt; von jedem derselben ziehe man Senkrechte auf die Dreiecksseiten; ist nun $S\hat{A}B = S'\hat{A}C = A'$, und $S\hat{A}C = S'\hat{A}B = A''$, so haben wir

$$SL \,.\, S'L' = AS \,.\, AS' \,.\, \sin A' \sin A'' = SN \,.\, S'N',$$

$$\text{also } S'L' : S'N' = SN : SL = h_{,,,} : h_{,,} = b : c$$

wo $h_{,,}$ und $h_{,,,}$ die zu den Seiten b und c gehörigen Höhen und demnach bekanntermassen $SL = \frac{1}{3} h_{,,}$ und $SN = \frac{1}{3} h'''$; in ähnlicher Weise ist $S'K' : S'L' = a : b$, so dass also $S'K' : S'L' : S'N' = a : b : c$

Setzen wir daher $S'K' = n \,.\, a$, so ist auch $S'L' = n \,.\, b$ und $S'N' = n \,.\, c$,

$$\text{also } 2 \triangle S'L'N' = S'L' \,.\, S'N' \,.\, \sin N'S'L' = n^2 \, b \, c \sin A, \text{ also}$$

$$\triangle S'L'N' = n^2 \,.\, \triangle, \text{ und eben so}$$

$$\triangle S'K'N' = n^2 \,.\, \triangle = \triangle S'K'L' = \triangle S'L'N'$$

Demnach ist S' der Schwerpunkt des Dreiecks K'L'N' und daher, wenn O ein beliebiger Punkt in der Ebene dieses Dreiecks,

$$\overline{S'K'}^2 + \overline{S'L'}^2 + \overline{S'N'}^2 = \overline{OK'}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{ON'}^2 - 3\,\overline{OS'}^2$$

Dagegen ist, wenn OP, OQ, OR die Senkrechten von O auf die Dreiecksseiten sind,

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = \overline{OK'}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{ON'}^2 - (\overline{PK'}^2 + \overline{QL'}^2 + \overline{RN'}^2)$$

Nun bilden aber PK', QL', RN' die Orthogonalprojectionen des gemeinsamen Objects OS' auf die Seiten des Urdreiecks, sie sind also entweder sämmtlich kleiner als ihr Object, oder höchstens eine eben so gross als dasselbe, also jedenfalls

$$3\,\overline{OS'}^2 > \overline{PK'}^2 + \overline{QL'}^2 + \overline{RN'}^2$$

darum auch

$$\overline{S'K'}^2 + \overline{S'L'}^2 + \overline{S'N'}^2 < \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2$$

also da O ein ganz beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ist, so bildet die Quadratsumme

$$\overline{S'K'}^2 + \overline{S'L'}^2 + \overline{S'N'}^2$$

ein Minimum.

Einen anderen Beweis für unsern Satz hat durch Hülfe der Coordinatengeometrie und Differentialrechnung ein Wiener Mathematiker L. C. Schulz von Strasznicki in der Schrift gegeben, welche er im Jahre 1827 unter dem Titel: „Das gradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt" erscheinen liess.

Selbst abgesehen davon, dass der genannte Gelehrte den Punkt S' nicht auf den einfachen Begriff von Gegenpunkt des Schwerpunktes zurückgeführt hat, möchte der vorstehende elementare Beweis nicht gerade einen Vergleich mit dem Strasznicki'schen, wie er sich pag. 12 sqq. der angeführten Schrift befindet, zu scheuen haben.

l. Bezeichnet man für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises die Normalquotienten durch q', q'', q''', so folgt unmittelbar aus bekannten Lehrsätzen, dass

$$q' : q'' : q''' = a : b : c,$$

also

$$q' = \frac{a}{a+b+c},\ q'' = \frac{b}{a+b+c},\ q''' = \frac{c}{a+b+c},$$

demnach ist:

$$,q = 1 - 2q',\ ,,q = 1 - 2q'',\ ,,,q = 1 - 2q''',$$

also auch

$$q' = \tfrac{1}{2}(,,q + ,,,q),\ q'' = \tfrac{1}{2}(,q + ,,,q),\ q''' = \tfrac{1}{2}(,q + ,,q)$$

d. h. der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und der Punkt, in welchem sich die Transversalen schneiden, welche durch die Punkte bestimmt werden, in denen die Dreiecksseiten von ihren äussern Berührungskreisen berührt werden, haben eine solche gegenseitige Lage, dass für den ersten der Normalquotient jeder Seite das arithmetische Mittel zwischen den zu den beiden andern Seiten gehörigen Normalquotienten des andern Punktes ist.

m. Nimmt man den Punkt, welcher dem Mittelpunkt des innern Kreises zugeordnet (Anmerkung zu k) ist, und nennt die zu ihm gehörigen Normalquotienten $'q$, $''q$, $'''q$,

$$\text{so ist: } 'q : ''q : '''q = h, : h,, : h,,,$$

also, wenn man die Zähler unserer Quotienten durch p', p'', p''' bezeichnet,

$$p' : p'' : p''' = h,^2 : h,,^2 : h,,,^2$$

d. h. die Entfernungen des dem Mittelpunkte des innern Kreises zugeordneten Punktes von den Dreiecksseiten verhalten sich wie Quadrate der zu diesen Dreiecksseiten gehörigen Höhen.

n. Die dem Mittelpunkt des äussern Kreises zugehörigen Normalquotienten der Seiten mögen $\overset{,}{q}$, $\overset{,,}{q}$, $\overset{,,,}{q}$ heissen; man hat alsdann

$$\overset{,}{q} = \frac{R\cos A}{2R\sin B\sin C} = \frac{\sin 2A}{4\sin A\sin B\sin C}$$

$$\overset{,,}{q} = \frac{\sin 2B}{4\sin A\sin B\sin C}$$

$$\overset{,,,}{q} = \frac{\sin 2C}{4\sin A\sin B\sin C}$$

Nun ist aber, wenn D, E, F (Fig. 3) die Fusspunkte der Dreieckshöhen sind, wie bekannt,

$$DE = R \sin 2 C,\ DF = R \sin 2 B,\ EF = R \sin 2 A$$

demnach ist:

$$q' : q'' : q''' = EF : DF : DE,$$

also

$$q' = \frac{EF}{DE + DF + EF},\ q'' = \frac{DF}{DE + DF + EF},\ q''' = \frac{DE}{DE + DF + EF}$$

o. Ganz dieselben Werthe wie die bisher betrachteten Normalquotienten eines gegebenen Punktes haben die schon oben (Anmerkung 4 zu 7) erwähnten Quotienten, welche man erhält, wenn man jeden untern Abschnitt der durch diesen Punkt gezogenen Transversalen durch die ganze Transversale dividiert. Man könnte diesen Quotienten den Namen Transversalquotienten geben und zwar untere Transversalquotienten, um sie von den obern zu unterscheiden d. h. denjenigen, wo die obern Abschnitte der Transversalen die Dividenden bilden.

Bezeichnet man für einen beliebigen Punkt die untern Transversalquotienten durch $q_{,}$, $q_{,,}$, $q_{,,,}$, die obern durch $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, so ist stets

$$Q_{,} = q_{,,} + q_{,,,},\ Q_{,,} = q_{,} + q_{,,,},\ Q_{,,,} = q_{,} + q_{,,}$$
$$\text{weil } q_{,} + q_{,,} + q_{,,,} = 1 = Q_{,} + q_{,}$$

p. Aus dem eben Gesagten ergiebt sich in Verbindung mit dem, was vorher (1) erwiesen worden ist, der

Lehrsatz: Der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und sein zugeordneter Punkt stehen in einer solchen Beziehung, dass für den letzteren der obere Transversalquotient einer Seite doppelt so gross ist, als der untere Transversalquotient eben dieser Seite für den ersten.

q. Aus der vorhin (n) entwickelten Beziehung ergiebt sich noch der

Lehrsatz: Construiert man die drei Höhen eines Dreiecks, verbindet deren Fusspunkte unter einander und zieht die Transversalenternion, welche sich im Mittelpunkt des äussern Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus dem untern Abschnitt einer dieser letztern Transversalen und aus dem Umfang des durch die Fusspunkte der Höhen bestimmten Dreiecks gleichflächig dem Rechteck aus der ganzen Transversale und aus der Entfernung der Fusspunkte der zu den beiden andern Seiten gehörigen Höhen.

8. Doch um uns nicht zu weit von dem Gegenstande, von dem wir ausgiengen, zu entfernen, kehren wir nach dieser kleinen Abschweifung wieder zu ihm zurück.

Man kann den früher (4) entwickelten Lehrsatz dahin verallgemeinern, dass man von dem Punkte N nicht Senkrechte nach den Dreiecksseiten, sondern überhaupt solche Gerade zieht, von denen die eine mit ihrer Seite Winkel von derselben Grösse bildet, wie die beiden andern einzeln mit den ihrigen.

Denn nennt man solche Gerade NL′, NK′, NO′, während NK, NL, NO ihre bisherige Bedeutung behalten, und bezeichnet den Winkel, unter welchem die Geraden nach den Dreiecksseiten gezogen sind, durch φ, so ist (Fig. 1)

$$-NK' + NL' + NO' = (-NK + NL + NO) \operatorname{cosec} \varphi$$

Ist also $-NK + NL + NO$ eine von der besondern Lage des Punktes N auf QS unabhängige Länge, so gilt dies natürlich auch von $(-NK + NL + NO) \operatorname{cosec}\varphi$ d. i. von $-NK' + NL' + NO'$.

Nimmt man also auf zwei Dreiecksseiten von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus Segmente von gleicher Grösse mit der dritten Seite und zieht von einem beliebigen Punkt N der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden nach den einzelnen Seiten des Dreiecks Linien unter einerlei Winkel, so ist das Aggregat derselben eine unveränderliche von der besondern Lage des Punktes N unabhängige Länge.

9. Construiert man alle drei Entfernungsörter QS, TU, VW (Fig. 6) eines Dreiecks, nimmt also $BD = AE = AB$, $CF = AG = AC$, und $CH = BI = BC$, so ist, wenn man F mit A verbindet und diese Gerade bis zum Durchschnitt mit VW in K verlängert;

$$AG : AF = CA : AF = CB : BH = BI : BH = AI : AK$$

mithin sind die Dreiecke AFG und AKI ähnlich, und darum wegen der daraus sich ergebenden Gleichheit der Winkel die Geraden TU und VW einander parallel. Auf ganz ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass TU und VW parallel mit QS ist.

Wir sehen also dass

unsere drei Entfernungsörter unter einander parallel sind.

Anmerkung 1. Diesen Parallelismus durfte man im Voraus vermuthen, weil, wenn er nicht Statt fände, also je zwei Oerter sich schnitten, diesen Durchschnittspunkten die Eigenschaften beider Entfernungsörter zugleich zukommen müssten, also auch stets

$$\frac{2\,ABDE}{c} = \frac{2\,AGFC}{b} = \frac{2\,(ABC - AHI)}{a}$$

sein müsste, was mindestens sehr unwahrscheinlich.

Anmerkung 2. Für ein gleichschenkeliges Dreieck ist der zur Grundlinie gehörige Entfernungsort dieser Grundlinie parallel, und fallen die beiden andern Oerter ganz mit ihr zusammen.

10. Bezeichnet man durch $\sum_{(a)} p$ das Aggregat der Senkrechten, welche man von einem beliebigen Punkte des zur Seite a gehörigen Entfernungsortes auf die Dreiecksseiten fällt, so ist:

$$\begin{aligned}\sum_{(a)} p &= \frac{2 \triangle ABC - 2 \triangle AHI}{a} \\ &= \frac{b\,c - (a - b)(a - c)}{a} \,.\, \sin A \\ &= (-a + b + c) \sin A.\end{aligned}$$

In ganz ähnlicher Weise findet man:

$$\sum_{(b)} p = (a - b + c) \sin B$$
$$\sum_{(c)} p = (a + b - c) \sin C$$

In jedem Dreieck ist also die Senkrechte, welche man von einem Berührungspunkt des innern Kreises auf eine der beiden andern Seiten fällt, halb so gross als das Aggregat der drei Senkrechten, welche man von einem beliebigen Punkte des zur dritten Seite gehörigen Entfernungsortes nach den Dreiecksseiten zieht.

Anmerkung 1. Man sieht hieraus, dass wenn in einem gleichseitigen Dreieck das Aggregat dieser Entfernungen gleich ist der Dreieckshöhe, diese Eigenschaft der Höhe nicht sowohl als solcher, sondern mehr insofern zukommt, als sie das Doppelte der Entfernung ist, welche ein Berührungspunkt des innern Kreises eines solchen Dreiecks von einer der beiden andern Seiten hat.

Anmerkung 2. Wenn wir künftig von einer Linienternion eines Entfernungsortes reden, so verstehen wir darunter drei solche Gerade, die von einem und demselben Punkte dieses Ortes entweder senkrecht oder unter einem andern aber für alle drei Seiten einerlei Grösse habenden Winkel nach diesen Seiten gezogen sind. Die Grösse oder Länge einer solchen Ternion ist uns die Gerade, welche man erhält, wenn die drei diese Ternion bildenden Geraden nach Maassgabe der den einzelnen zukommenden Vorzeichen zu einer einzigen Linie vereinigt werden.

11. In rechtwinkeligen Dreiecken, wo bekanntlich immer die Cathetensumme um den Durchmesser des innern Kreises grösser ist als die Hypotenuse, ist daher das Aggregat jeder Ternion des Hypotenusenortes gleich dem Durchmesser des innern Kreises.

12. Zieht man durch einen der Berührungspunkte des innern Kreises eine Gerade parallel mit einer der beiden andern Seiten und verlängert sie bis sie den zur dritten Seite gehörigen Entfernungsort schneidet, so beträgt offenbar die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von der Dreiecksseite, der man die Gerade parallel zog, die Hälfte von der Länge der ganzen diesem Punkt zugehörigen Ternion; die Grösse der nach dieser Dreiecksseite gezogenen Senkrechten ist demnach so gross als das Aggregat der beiden andern.

Hieraus ergiebt sich der

> Lehrsatz: Jeder der beiden Punkte eines Entfernungsortes, in welchen derselbe geschnitten wird durch eine Gerade, die man parallel mit einer der nicht zugehörigen Seiten durch den auf der andern liegenden Berührungspunkt des innern Kreises zieht, hat die Eigenschaft, dass er von der einen Dreiecksseite eben so weit entfernt ist, als von den beiden andern zusammen.

13. Fragt man nach denjenigen Punkten eines Entfernungsortes, für welche zwei Glieder der zugehörigen Ternion von Senkrechten an Länge einander gleich sind, so müssen, wie leicht zu erachten, als solche diejenigen bezeichnet werden, in denen der Ort die Winkelhalbierenden des Dreiecks schneidet. Die innern Winkelhalbierenden unterscheiden sich aber hierbei von den äussern dadurch, dass die beiden gleichen Senkrechten für Punkte auf jenen auch stets einerlei Vorzeichen haben, für Punkte auf diesen dagegen verschiedene. Dieser letztere Umstand hat zur Folge, dass bei solchen Ternionen von Senkrechten eines Entfernungsortes, die zu Punkten gehören, welche auf einer der äussern Winkelhalbierenden liegen, zwei Glieder als von gleicher Grösse aber entgegengesetzten Vorzeichen sich gegenseitig aufheben, dass mithin die dritte Senkrechte allein die Länge des ganzen Aggregates darstellt.

Man kann daher für einen Entfernungsort die unveränderliche Grösse des Aggregates jeder zu ihm gehörigen Ternion von Senkrechten dadurch zur Darstellung bringen, dass man diesen

Ort bis zum Durchschnitt mit einer der äussern Winkelhalbierenden verlängert. Die Senkrechte von diesem Punkt auf die Gegenseite des halbierten Aussenwinkels leistet das Verlangte. Zugleich ergiebt sich hieraus, dass die Entfernungen, welche die drei Punkte, in denen ein Entfernungsort die äussern Winkelhalbierenden schneidet, einzeln von den Gegenseiten der halbierten Aussenwinkel haben, von gleicher Grösse sind.

Leicht folgt aus dem Bisherigen, dass wenn (Fig. 1) Z der Punkt ist, in welchem der zu AB gehörige Entfernungsort QS die den Aussenwinkel bei C Halbierende schneidet, das Dreieck ABZ gleichflächig ist dem Viereck ABDE.

14. Fällt man von dem auf der Seite AC liegenden Berührungspunkt des innern Kreises eine Senktrechte auf die Seite BC, verlängert sie über den Berührungspunkt hinaus um ihre eigne Länge und zieht durch diesen Endpunkt eine Parallele mit BC, so ist dieselbe nach (10) der geometrische Ort für alle Punkte, welche von BC um die Länge einer Ternion des zu AB gehörigen Entfernungsortes entfernt sind; mithin muss nach (13) auf dieser Parallele auch der Punkt liegen, in welchem der genannte Ort die durch A gehende äussere Winkelhalbierende schneidet.

Fällt man also von dem Berührungspunkt des innern Kreises auf der einen Seite eines ungleichseitigen Dreiecks eine Senkrechte auf eine zweite Seite, verlängert dieselbe über den Berührungspunkt hinaus um ihre eigne Länge und zieht durch diesen Endpunkt eine Parallele mit der zweiten Dreiecksseite, so haben diese Parallele, die den Gegenaussenwinkel der zweiten Seite halbierende und der Entfernungsort der dritten Dreiecksseite einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

15. Durch Betrachtungen, ganz ähnlich den unmittelbar vorhergehenden, läst sich eine Anzahl von Lehrsätzen gewinnen, die denen der letzten Paragraphen verwandt sind, z. B.

> Trifft die Senkrechte, welche man von einem Berührungspunkt des innern Kreises auf eine zweite Seite fällt, in ihrer über den Fusspunkt hinausgehenden Verlängerung den zur dritten Seite gehörigen Entfernungsort (im Punkte X) so ist die so verlängerte Senkrechte halb so gross als die Summe (nicht Aggregat) der drei die Ternion des Punktes X bildenden Linien.

Wir wollen aber diesen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen, sondern uns damit begnügen, seine weitere Verfolgung der Aufmerksamkeit des Lesers zu empfehlen.

16. Behalten R und r ihre bisherige Bedeutung, bezeichnet ϱ den Radius vom innern Berührungskreise des Dreiecks, welches die Fusspunkte der Höhen des Urdreiecks zu seinen Spitzen hat, Σh die Summe der Dreieckshöhen, so ist nach dem früher (10) erwiesenen Satz

$$\Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p = (b+c)\sin A + (a+c)\sin B + (a+b)\sin C - (a\sin A + b\sin B + c\sin C)$$
$$= 2\,\Sigma h - 2\,R\,(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 2\,\Sigma h - 2\,R\,(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$$
$$= 2\,\Sigma h - 2\,R\,(3 - \frac{R - \varrho}{R})$$

weil, wie bekannt, in jedem Dreieck ist:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{R - \varrho}{R} \text{*)}$$

und demnach

$$\Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p = 2 \Sigma h - 2 (2 R + \varrho)$$

d. h. Construiert man für ein Dreieck alle drei Entfernungsörter und für jeden derselben eine Ternion von Senkrechten, so ist das Aggregat aller dieser neun Geraden um die doppelte Summe aus dem Durchmesser des äussern Kreises und dem Radius des innern Kreises von dem durch die Fusspunkte der Höhen bestimmten Dreieck — dasselbe mag kurzweg das Fusspunkt-Dreieck heissen — kleiner als die doppelte Summe aller drei Höhen.

17. Fällt man daher vom ersten Berührungspunkt des innnern Kreises eine Senkrechte auf die zweite Seite, von dem zweiten eine solche auf die dritte, und vom dritten auf die erste, so ist die Summe dieser drei Senkrechten vermehrt um den Durchmesser des äussern Kreises und den Radius vom innern Kreise des Fusspunkt-Dreiecks so gross als die drei Höhen des Dreiecks zusammen.

18. Bekannten Beziehungen zufolge ist

$$(-a + b + c) \sin A = \sin A (- \sin A + \sin B + \sin C)\, 2 R$$

$$= \sin A \,.\, \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \,.\, 8 R$$

$$= \cos^2\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2} \,.\, 16 R$$

$$= 4 \cos^2\frac{A}{2} \,.\, r$$

da, wie bekannt,

$$r = 4 \sin\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2} \,.\, R$$

Es ist demnach

$$\Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p = \left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) 4 r$$

$$= \frac{r + 4 R}{2 R} \,.\, 4 r$$

weil in jedem Dreieck bekanntlich (A. S. §. 798 Zus. 1).

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{r + 4 R}{2 R}$$

ist.

---

*) Siehe die Anhänge zu van Swinden §. 797. Bei künftigen Citaten werden wir dieselben kurz mit A. S. bezeichnen.

Es ist also stets:

$$\left(\Sigma_{(a)}\, p + \Sigma_{(b)}\, p + \Sigma_{(c)}\, p\right) R = 2\, r\, (r + 4\, R)$$

d. h. fällt man aus jedem Berührungspunkte des innern Kreises auf die beiden andern Dreiecksseiten Senkrechte, so ist das Rechteck aus der Summe dieser sechs Geraden und aus dem Radius des äussern Kreises gleichflächig dem Rechteck aus dem Durchmesser des innern Kreises und aus dem um denRadius eben dieses Kreises vermehrten doppelten Durchmesser des äussern Kreises.

Zus. 1. Es ist also

$$\Sigma_{(a)}\, p : \Sigma_{(b)}\, p : \Sigma_{(c)}\, p = \cos^2 \frac{A}{2} : \cos^2 \frac{B}{2} : \cos^2 \frac{C}{2}$$

d. h. die Längen der einzelnen zu den drei Entfernungsörtern eines Dreiecks gehörigen Ternionen verhalten sich wie die Quadrate der Cosinus von den halben Gegenwinkeln der zu den Oertern gehörigen Seiten.

Zus. 2. Die grösste Länge hat also jede Ternion des zur kleinsten Seite gehörigen Entfernungsortes.

Zus. 3. In einem rechtwinkeligen Dreieck, wo einer der spitzen Winkel doppelt so gross als der andere, ist das Dreifache der Länge jeder Ternion des Hypotenusenortes doppelt so gross als die Länge jeder Ternion des zur grössern Cathete gehörigen Ortes.

18.a Ob es auch Dreiecke von solcher Beschaffenheit geben kann, dass die grösste unserer drei Aggregatlängen so gross ist als die beiden andern zusammen?

Zur Entscheidung dieser Frage dient die Erwägung, dass, wenn dies möglich sein sollte, nach 18, Zus. 1 nothwendig auch (unter der Voraussetzung dass c die kleinste Dreiecksseite ist) sein müsste

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2},$$

also auch

$$2 \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2}$$

und darum auch

$$1 + \cos C = 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + \cos B$$

oder

$$\cos C - \cos B = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} (B + C) \sin \tfrac{1}{2} (B - C) = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} (B + C)$$

also auch

$$\sin \tfrac{1}{2} (B - C) = \sin \tfrac{1}{2} (B + C)$$

und darum

$$\tfrac{1}{2} (B - C) = \tfrac{1}{2} (B + C)$$

eine Gleichung, die offenbar so lange einen Widerspruch in sich schliest, als C nicht Null ist d. h. so lange als unser Dreieck nicht aufhört, ein Dreieck zu sein.

Es kann also niemals die Länge einer Ternion des einen Entfernungsortes so gross sein als die Längen zweier Ternionen der beiden andern zusammen.

Fragte man dagegen, ob eine unserer Aggregatlängen das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern sein könne, so würde die Untersuchung ein der Erwartung günstigeres Ergebniss liefern.

Dieses arithmetische Mittel könnte natürlich nur die Aggregatlänge des der mittlern Dreiecksseite zugehörigen Entfernungsortes bilden. Wäre b diese der Grösse nach mittlere Seite, so würde nach 18 Zus. 1. die in Rede stehende Beziehung sich an die Bedingung knüpfen, dass

$$2\cos^2\frac{B}{2} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{C}{2}, \text{ also}$$

$$3\cos^2\frac{B}{2} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

wäre, also auch, weil einer bekannten Beziehung zufolge (A . S . §. 798)

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2},$$

$$3\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right) = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \text{ oder}$$

$$1 = 3\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= \sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 3\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{3\,r''}{4\,R} - \frac{r}{4\,R}, \text{ also}$$

$$r + 4\,R = 3\,r'', \text{ und da (A. S. §. 843 Zus.) } r + 4\,R = r' + r'' + r'''$$

$$2\,r'' = r' + r'''$$

wo r' r'' r''' die Radien der zu den Seiten a, b und c gehörigen äussern Berührungskreise sind.

Und wir erhalten demnach den bemerkenswerthen

Lehrsatz: In jedem Dreieck, in welchem der Radius eines der äussern Berührungskreise das arithmetische Mittel zwischen denen der beiden andern ist, findet dieselbe Beziehung zwischen den Ternionenlängen der mit diesen Kreisen zu einerlei Dreiecksseite gehörigen Entfernungsörter Statt.

19. Behalten r', r'', r''' ihre bisherige Bedeutung, so ist wegen (18) und weil, wie bereits erwähnt,

$$r' + r'' + r''' = r + 4 R,$$

auch stets

$$\left(\Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p\right) R = 2 r (r' + r'' + r''')$$

d. h. das Rechteck aus der Summe der im früheren Satze (18) genannten sechs Senkrechten und aus dem Radius des äussern Kreises ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des innern und aus der Summe der Radien der drei äussern Berührungskreise.

20. Da, einem bekannten Satze zufolge,

$$r (r' + r'' + r''') = ab + ac + bc - \left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2$$

so ist auch

$$\left(\Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p\right) . \frac{R}{2} = ab + ac + bc - \left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2$$

d. h. das Rechteck aus der Summe der mehrgenannten sechs Senkrechten und aus dem halben Radius des äussern Kreises ist gleich dem Ueberschuss der Summe der Rechtecke aus je zwei Dreiecksseiten über das Quadrat des halben Dreiecksumfanges.

21. Zieht man von einem Punkte eines der Entfernungsörter eines Dreiecks nach dessen Seiten nicht Senkrechte sondern Linien unter einem Winkel, welcher gleich ist dem Gegenwinkel derjenigen Seite, zu welcher der Entfernungsort gehört, so ergiebt sich aus dem, was bereits (8) bemerkt worden, für den Werth des Aggregates einer solchen Linienternion, wenn der Entfernungsort zur Seite a gehört, der Ausdruck

$$(- a + b + c) \sin A \operatorname{cosec} A \text{ d. i. } - a + b + c$$

und natürlich gewinnt man entsprechende Ausdrücke für die beiden andern Entfernungsörter.

Wir erhalten so den

Lehrsatz: Das Aggregat der Geraden, welche man von einem Punkte eines Entfernungsortes nach den Dreiecksseiten unter Winkeln zieht, welche gleich sind dem Gegenwinkel der zu dem Orte gehörigen Seite, ist so gross als der Ueberschuss der Summe der beiden dem Orte nicht zugehörigen Seiten über die dritte.

22. Unmittelbar ergiebt sich hieraus:

Zieht man von jedem der drei Entfernungsörter eines Dreiecks nach dessen Seiten Gerade unter Winkeln, welche von gleicher Grösse sind mit dem Gegenwinkel der zu dem Orte gehörigen Seite, so ist das Aggregat aller dieser neun Linien so gross als der Umfang des Dreiecks.

23. Ist die Gerade QDES (Fig. 6) der zur Seite c gehörige Entfernungsort, und man zieht AD, so ist, weil AB = BD, nach bekannten Eigenschaften der Dreiecke

$$AD = 2\,c\,.\,\sin\frac{B}{2}$$

$$D\hat{A}C = \tfrac{1}{2}\,(A - C),\ \text{also}$$

$$\overline{DE}^2 = c^2 + 4\,c^2\,\sin^2\frac{B}{2} - 4\,c^2\,\sin\frac{B}{2}\cos\tfrac{1}{2}\,(A - C)$$

$$= c^2\left(1 + 4\sin\frac{B}{2}\,[\cos\tfrac{1}{2}\,(A + C) - \cos\tfrac{1}{2}\,(A - C)]\right)$$

$$= c^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{also}\ \left(\frac{DE}{c}\right)^2 = 1 - 8\sin\frac{A}{2}\,.\,\sin\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}$$

Da aber die rechte Seite unserer Gleichung eine Funktion blos von den Winkeln des Urdreiecks bildet und zwar für diese symmetrisch ist d. h. sich nicht ändert, wenn man irgend zwei dieser Winkel durchweg untereinander vertauscht, so ist klar, dass man denselben Ausdruck, wie jetzt, bekommen haben würde, wenn man anstatt des zu c gehörigen Entfernungsortes und seines zwischen den beiden nicht zugehörigen Seiten enthaltenen Stückes DE, entweder den zu b gehörigen Ort TU und das Segment FG, oder den zu a gehörigen Ort VW und das Segment HI genommen hätte; demnach ist

$$\left(\frac{DE}{c}\right)^2 = \left(\frac{FG}{b}\right)^2 = \left(\frac{HI}{a}\right)^2 = 1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

und darum auch

$$\frac{DE}{c} = \frac{FG}{b} = \frac{HI}{a}$$

d. h. diejenigen Segmente der drei Entfernungsörter eines Dreiecks, welche zwischen den nicht zugehörigen Seiten enthalten sind, bilden gleiche aliquote Theile von ihren zugehörigen Seiten, oder sind diesen zugehörigen Seiten verhältnissgleich.

Anmerkung. Aus unserm Satze, wie aus vielen andern, folgt, dass in jedem nicht gleichseitigen Dreieck $8\sin\frac{A}{2}\,.\,\sin\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2} < 1$ ist.

Zus. 1. Ein aus diesen Segmenten als bestimmenden Seitenlängen construiertes Dreieck ist daher dem Urdreieck ähnlich.

Zus. 2. Nimmt man also auf AB (Fig. 7) von A aus die Länge DE und zieht durch den so erhaltenen Punkt X eine Gerade nach AC parallel mit BC, so ist, wenn Y der Durchschnitt zwischen AC und dieser Parallelen,

$$AY = FG, \text{ und } XY = HI.$$

24. Einer bekannten Beziehung gemäss ist

$$1 - 8 \sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1 - \frac{2 r}{R} = \frac{R^2 - 2 Rr}{R^2}$$

und gleichfalls bekannt ist, dass wenn man die Entfernung der Mittelpunkte des äussern und innern Kreises des Dreiecks — der Kürze halber wollen wir sie die Excentricität des Dreiecks nennen — durch e bezeichnet,

$$e^2 = R^2 - 2 Rr$$

Demnach ist

$$\frac{DE}{c} = \frac{FG}{b} = \frac{HI}{a} = \frac{e}{R}$$

d. h. Das zwischen den nicht zugehörigen Seiten enthaltene Segment jedes Entfernungsortes hat zu seiner zugehörigen Seite dasselbe Längenverhältniss, welches des Dreiecks Excentricität zum Radius des äussern Kreises hat.

25. Bezeichnen, wie bisher, $h_{,}$, $h_{,,}$, $h_{,,,}$ die zu den Seiten a, b und c gehörigen Dreieckshöhen, so ist, wie bekannt

$$2 R . h_{,,,} = ab, \; 2 R . h'' = ac, \; 2 R . h_{,} = bc.$$

In Verbindung mit dem unmittelbar vorhergehenden Satz ergiebt sich hieraus:

$$a . FG = b . HI = 2 e . h_{,,,}$$
$$b . DE = c . HI = 2 e . h_{,,}$$
$$b . DE = c . FG = 2 e . h_{,}$$

d. h. Bildet man für zwei Entfernungsörter aus dem zwischen den nicht zugehörigen Seiten enthaltenen Segment eines jeden und aus der zum andern gehörigen Seite ein Rechteck, so ist jedes derselben doppelt so gross als das Rechteck aus der zur dritten Seite gehörigen Höhe und aus der Excentricitat des Dreiecks.

26. Da für die beiden Dreiecke AQE und BQD (Fig. 1) offenbar

$$\frac{AE}{\sin AQE} = \frac{BD}{\sin BQD},$$

so ist auch

$$\frac{QE}{\sin QAE} = \frac{QD}{\sin QBD},$$

$$\text{oder } \frac{QE}{\sin A} = \frac{QD}{\sin B}$$

und darum auch

$$\frac{QE}{a} = \frac{QD}{b}, \text{ oder } \frac{QE}{QD} = \frac{a}{b}$$

oder

$$QD \, . \, a = QE \, . \, b$$

d. h. die Segmente eines Entfernungsortes, welche von der zugehörigen Seite aus gerechnet durch die beiden nicht zugehörigen abgeschnitten werden, verhalten sich umgekehrt wie diese nicht zugehörigen Seiten;
oder:

Die Rechtecke aus je einem Segment eines Ortes, das zwischen der zugehörigen Seite und einer der nicht zugehörigen enthalten ist, und aus dieser letztern selbst sind inhaltsgleich.

Zus. 1. Daher verhalten sich zwei solche Segmente eines Entfernungsortes wie die Höhen der sie begränzenden nicht zugehörigen Seiten.

Zus. 2. Sind also VHI, GFX und QDE (Fig. 6) die zu den Seiten a, b, c gehörigen Entfernungsörter, so ist:

$$\begin{array}{c} VH : VI = h_{,,} : h_{,,,} \\ XG : XF = h_{,,,} : h_{,} \\ QD : QE = h_{,} : h_{,,} \\ \hline VH \, . \, XG \, . \, QD = VI \, . \, XF \, . \, QE \end{array}$$

d. h. Construiert man für ein ungleichseitiges Dreieck alle drei Entfernungsörter, verlängert jeden bis er auch die zugehörige Seite schneidet, und nimmt das senkrechte Parallelepipedon sowohl aus den drei Segmenten, welche einzeln zwischen der zugehörigen Seite selbst und ihrer nächsten Nachfolgerin enthalten sind, als auch aus denjenigen, welche durch zugehörige Seite und nächste Vorgängerin begränzt werden, so sind diese beiden Parallelepipeda inhaltsgleich.

27. Da die Punkte Q, D, E (Fig. 6) in gerader Linie liegen, so ist, einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke zufolge,

$$AE \, . \, BQ \, . \, CD = AQ \, . \, BD \, . \, CE$$

und darum auch

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{CD}{CE}, \text{ und eben so}$$

$$\frac{CX}{AX} = \frac{BG}{BF}$$

$$\frac{CV}{BV} = \frac{AI}{AH}$$



d. h. die Segmente, in welche eine Dreiecksseite durch ihren Entfernungsort getheilt wird, verhalten sich wie die Längenunterschiede zwischen der zugehörigen und derjenigen nicht zugehörigen Seite, welche das entsprechende Segment nicht begränzt.

27a. Man kann die Frage aufwerfen, ob denn die Lage, welche unsere drei Entfernungsörter gegen die Dreiecksseiten haben, eine diesen Linien allein und ausschliesslich zukommende sei, oder ob sie dieselbe nicht vielmehr mit andern und zwar solchen Geraden theilen, welche durch irgend bemerkenswerthe beim Dreieck vorkommende Punkte bestimmt werden? Diese Frage ist dahin zu beantworten, dass es wenigstens eine solche Gerade giebt, welche mit unsern Entfernungsörtern parallel ist.

Zieht man nämlich durch die Ecken A und B des Dreiecks ABC (Fig. 6a) die äussern Winkelhalbierenden, und verlängert jede bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite der Ecke, durch welche sie hindurchgeht, so ist die durch diese beiden Durchschnittspunkte U, V bestimmte Gerade parallel mit QDES, wenn, wie bisher, diese Linie den zur Seite c gehörigen Entfernungsort bildet.

Denn, wie bekannt, ist

$$CU : BU = b : c, \text{ also auch}$$

$$CU : CU - BU = b : b - c, \text{ also}$$

$$CU = \frac{b}{b - c} \cdot a, \text{ und in ähnlicher Weise}$$

$$CV = \frac{a}{a - c} \cdot b, \text{ mithin}$$

$$CU : CV = \frac{a\,b}{b - c} : \frac{a\,b}{a - c} = a - c : b - c = CD : CE$$

und darum UV || QS.

Zu demselben Resultat würde man gelangt sein, wenn man entweder den zur Seite a gehörigen Entfernungsort mit der Geraden VW (W ist der Durchschnitt der durch C gehenden Winkelhalbierenden mit der Seite c) oder den zu b gehörigen Ort mit der Geraden UW verglichen hätte.

Es sind also die drei Geraden UV, UW und VW, weil sie den einzelnen Entfernungsörtern parallel sind, auch unter einander parallel, und da je zwei einen Punkt gemeinsam haben, so fallen sie in eine und dieselbe Gerade zusammen. Wir erhalten demnach den

> Lehrsatz: Verlängert man von den drei äussern Winkelhalbierenden eines ungleichseitigen Dreiecks jede bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite der Ecke, durch welche sie hindurchgeht, so liegen diese drei Punkte in gerader Linie und zwar ist dieselbe den Entfernungsörtern des Dreiecks parallel.

Wir werden später noch einmal auf die Betrachtung solcher Geraden, welche unsern Entfernungsörtern parallel sind, zurückkommen.

28. Wenn R′, R″, R‴ die Radien der drei Kreise bezeichnen, welche sich beschreiben lassen beziehungsweise um die Dreiecke AHI, BFG, CDE, d. h. um die von den einzelnen Ent-

4



fernungsörtern und den nicht zugehörigen Seiten gebildeten Dreiecke, so ist nach bekannter Beziehung

$$R' = \frac{HI}{2 \sin A}, \; R'' = \frac{FG}{2 \sin B}, \; R''' = \frac{DE}{2 \sin C}$$

also auch, weil eben $2 \sin A = \frac{a}{R}$,

$$\frac{R'}{R} = \frac{HI}{a}, \; \frac{R''}{R} = \frac{FG}{b}, \; \frac{R'''}{R} = \frac{DE}{c}$$

Nun haben wir aber bereits früher (23) erwiesen, dass

$$\frac{HI}{a} = \frac{FG}{b} = \frac{DE}{c}$$

ist; demnach muss auch stets

$$R' = R'' = R'''$$

sein

d. h. die äussern Kreise derjenigen Dreiecke, welche von je einem Entfernungsort und den beiden nicht zugehörigen Seiten gebildet werden, sind von gleicher Grösse.

29. Da wir aus dem Vorhergehenden (24) auch bereits wissen, dass

$$\frac{HI}{a} = \frac{FG}{b} = \frac{DE}{c} = \frac{e}{R}$$

so ist also auch

$$R' = R'' = R''' = e$$

d. h. die drei Radien der vorhin genannten Kreise sind nicht nur unter sich, sondern auch der Excentricität des Dreiecks gleich.

30. Nimmt man auf der Seite AB (Fig. 7) das Segment AX so, dass es gleich ist dem Segment des zu AB gehörigen Entfernungsortes, welches durch die beiden nicht zugehörigen Seiten begränzt wird, nimmt also AX gleich der Länge, die in unserer Fig. 6 durch DE bezeichnet wurde, nimmt dann in ähnlicher Weise BV und CT einzeln gleich den Längen, die in der genannten Figur durch HI und FG dargestellt wurden, und zieht $XY \parallel BC$, $VW \parallel AC$, $TU \parallel AB$, so folgt aus 23, Zus. 2 leicht, dass die drei Dreiecke AXY, BVW und CTU unter einander congruent sind, indem deren Seiten einzeln gleich den Segmenten der Entfernungsörter sind, welche durch die nicht zugehörigen Seiten begränzt werden. Die äussern Kreise dieser drei Dreiecke sind daher gleich, aber nicht blos untereinander, sondern weil

$$\frac{XY}{2 \sin A} = \frac{HI}{2 \sin A}, \; \frac{VW}{2 \sin B} = \frac{FG}{2 \sin B}, \; \frac{TU}{2 \sin C} = \frac{DE}{2 \sin C}$$

ist, auch gleich den Radien der äussern Kreise von den Dreiecken, die wir in der sechsten Figur durch AHI, BFG und CDE bezeichnet haben.

31. Durch Betrachtung der Fig. 7 ergiebt sich leicht noch Folgendes:

a. Die drei Dreiecke αUV, βTY, und γXW sind dem Urdreieck ähnlich und unter einander congruent.

b. Jedes derselben ist an Inhalt

$$= \left(\frac{UV}{a}\right)^2 . \triangle = \left(\frac{TY}{b}\right)^2 . \triangle = \left(\frac{WX}{c}\right)^2 . \triangle$$

$$= \left(\frac{2\,BV - a}{a}\right)^2 . \triangle$$

$$= \left(\frac{2\,e}{R} - 1\right)^2 . \triangle$$

c. Diese Dreiecke werden also zu Null d. h. sie schwinden in Punkte zusammen, wenn $\frac{2\,e}{R} = 1$ d. h. wenn $r = \frac{3\,R}{8}$

d. In dem eben genannten Falle müssen, eben weil $XW = o$ wird, die beiden Punkte mit einander und darum mit dem Halbierungspunkte von AB zusammenfallen; hieraus ergiebt sich

e. dass für alle diejenigen Dreiecke, bei denen der Radius des innern Kreises $\frac{3}{8}$ vom Radius des äussern ist, das durch die nicht zugehörigen Seiten begrenzte Stück vom Entfernungsort jeder Seite halb so gross ist als diese zugehörige Seite selbst.

f. In dem von den drei Parallelen gebildeten Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist

$$\begin{aligned} \beta\gamma &= XY - 2\,X\gamma \\ &= XY - 2\,UV \\ &= XY - 2\,(BV + CU - BC) \\ &= XY - 2\,(2\,XY - a) \\ &= 2\,a - 3\,XY \\ &= 2\,a - 3\,.\,\frac{e}{R}\,a, \end{aligned}$$

also $\triangle\ \alpha\beta\gamma = \left(2 - \frac{3\,e}{R}\right)^2 . \triangle$

g. In solchen Dreiecken also, wo

$$2\,R = 3\,e$$

d. h. wo $r = \frac{5}{18}\,R$ ist, haben die drei Parallelen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

g. Da stets $X\gamma = \beta Y$, $U\alpha = \beta T$, $V\alpha = \gamma\ W$ bleiben muss, wie auch die Grösse der Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ sich ändern mag, so kann dieser gemeinsame Durchschnittspunkt, wenn er Statt findet, kein anderer sein, als des Urdreiecks Schwerpunkt.

h. Ueberhaupt hat das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ mit dem Urdreieck den Schwerpunkt gemeinsam.

i. Auch die drei Parallelogramme $A\alpha$, $B\beta$, und $C\gamma$ sind unter einander gleichflächig.



Denn es ist der Inhalt von

$$A\alpha = AW \,.\, AT \,.\, \sin A$$
$$= \left(c - \frac{e}{R} \cdot c\right) \left(b - \frac{e}{R} \cdot b\right) \sin A$$
$$= 2 \left(1 - \frac{e}{R}\right)^2 . \triangle;$$

Der Ausdruck für diesen Inhalt ist also unabhängig von Allem, was das Parallelogramm $A\alpha$ von den beiden andern $B\beta$, und $C\gamma$ unterscheidet, und man schliesst mit Recht hieraus, dass man für diese letztern denselben Ausdruck finden würde.

k. Daher sind auch die Fünfecke

$AW\gamma\beta T$, $BX\gamma\alpha U$, und $CV\alpha\beta Y$

inhaltsgleich, und eben so die Vierecke

$AX\beta T$, $BV\gamma X$, und $CT\alpha V$.

l. Desjenigen Dreiecks, das die Mittelpunkte unserer drei Parallelogramme $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ zu seinen Ecken hat, Schwerpunkt fällt mit denen der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC zusammen.

m. Der Inhalt dieses letzt genannten Dreiecks ist, da seine der Seite c des Urdreiecks entsprechende Seite offenbar $= WX + \frac{1}{2} BX$ (Fig. 7),

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3\,e}{R} - 1\right)^2 . \triangle$$

n. Daher ist das Aggregat aus dem Doppelten einer der Seiten des eben betrachteten Dreiecks und aus der entsprechenden Seite des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, so gross als die Länge der entsprechenden des Urdreiecks.

32. Fragen wir nach den Winkeln, unter denen die Seiten des Urdreiecks von den Entfernungsörtern geschnitten werden, so ist, wenn R', R'', R''' die ihnen früher (28) beigelegte Bedeutung behalten, (Fig. 6)

$$\sin EDC = \frac{CE}{2\,R'''} = \frac{b - c}{2\,e} = (\sin B - \sin C) \,.\, \frac{R}{e}$$

und in ähnlicher Weise

$$\sin DEC = \frac{CD}{2\,R'''} = \frac{a - c}{2\,e} = (\sin A - \sin C) \,.\, \frac{R}{e}$$

$$\sin DQA = \sin FGA = \frac{BF}{2\,R''} = \frac{a - b}{2\,e} = (\sin A - \sin B) \,.\, \frac{R}{e}$$

Wir sehen also, das die Sinus der Winkel, unter welchen ein Entfernungsort die erste, zweite und dritte Dreiecksseite schneidet, sich eben so zu einander verhalten wie die Unterschiede der Sinus von den eben diesen Seiten anliegenden Winkelpaaren.

Zus. 1. Daher ist der Sinus des Winkels, den ein Entfernungsort mit der (der Grösse nach) mittleren Dreiecksseite bildet, so gross als die Sinus der beiden andern von diesen drei Winkeln zusammen genommen.

Zus. 2. Für gleichseitige Dreiecke lassen unsere Formeln die Grösse der Sinus unserer in Rede stehenden Winkel und somit diese Winkel selbst unbestimmt erscheinen, indem sie für den Sinus jedes der drei Winkel den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ geben. Nach der besondern Eigenthümlichkeit solcher Dreiecke in Beziehung auf die Entfernungsörter, wie wir sie früher ausführlich erörtert haben, ist dies nothwendig.

Zus. 3. Für ein gleichschenkeliges Dreieck, in dem namentlich $b = c$, ist

$$\sin EDC = o$$

wie es sein muss, da wir aus dem Frühern wissen, dass der zur Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks gehörige Entfernungsort dieser Grundlinie parallel ist.

Zus. 4. Die Winkel, welche die Oerter eines solchen Dreiecks mit den Schenkeln bilden, sind nicht nur überhaupt gleich, was unsere Formeln anzeigen, sondern auch insbesondere den Winkeln an der Grundlinie gleich.

Wir haben demnach

$$\sin B = \sin C = \pm (\sin A - \sin B) \frac{R}{e}$$

also auch

$$b = c = \pm (a - b) \frac{R}{e}$$

und darum

$$a \,.\, R = b \,.\, (R \pm e)$$

d. h. in jedem gleichschenkeligen Dreieck ist das Rechteck aus der Grundlinie und dem Radius des äussern Kreises gleich dem Rechteck aus einem Schenkel und dem um die Excentricität vermehrten oder verminderten Radius dieses Kreises.

Anmerkung. Es braucht kaum erinnert zu werden, dass der Radius des äussern Kreises um die Excentricität verlängert werden muss, wenn die Grundlinie grösser ist als jeder Schenkel, und dass das Gegentheil nothwendig wird im umgekehrten Falle.

Zus. 5. Daher ist in einem solchen gleichschenkeligen Dreieck, wo Grundlinie a und Schenkel b in der Beziehung stehen, dass

$$a = n \,.\, b$$

stets

$$e = \pm \frac{n}{n - 1} R.$$

33. Während in einem gleichschenkeligen Dreieck jeder Entfernungsort die beiden Schenkel unter gleichen Winkeln nothwendig und immer schneiden muss, so kann wenigstens auch bei ungleichseitigen Dreiecken der Fall eintreten, dass zwei Seiten unter gleichen Winkeln geschnitten werden.

So wird dies wirklich für die Seiten a und c Statt haben, wenn

$$\sin B - \sin C = \sin A - \sin B$$

also

$$\sin B = \frac{\sin A + \sin C}{2}$$

und darum auch

$$b = \frac{a + c}{2}$$

d. h. wenn das Dreieck zu denjenigen gehört, die man halbregelmässige nennen kann, indem zwischen den beiden Seiten, welche unter gleichen Winkeln von den Entfernungsörtern geschnitten werden, die dritte das arithmetische Mittel bildet.

Nun kann offenbar eine Gerade zwei Dreiecksseiten unter gleichen Winkeln nur dann schneiden, wenn sie parallel ist einer der beiden Geraden, welche den von diesen Seiten gebildeten Dreieckswinkel und den ihm anliegenden Aussenwinkel halbieren. Der letztere Fall d. h. der Parallelismus mit den äussern Winkelhalbierenden muss eintreten, wenn die beiden Punkte, in denen die Seiten von der betreffenden Geraden geschnitten werden, von deren gemeinschaftlichem Endpunkt aus nach einerlei Seite hin liegen, also beide zugleich entweder nach der Gegenseite hin, oder auf den über die Spitze hinausgehenden Verlängerungen; der erste Fall dagegen findet Statt, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Construiert man nun aber in einem solchen halbregelmässigen Dreieck den zur mittlern Seite gehörigen Entfernungsort, so ist klar, dass dieser die grösste Seite selbst die kleinste dagegen in ihrer über die grösste hinausgehenden Verlängerung schneidet.

Eine innere Winkelhalbierende des Dreiecks muss es daher sein, welcher dieser Ort und mit ihm die beiden andern parallel sind, diejenige nämlich, welche den von der grössten und kleinsten Dreiecksseite gebildeten Winkel theilt.

Wir sind also zu dem Satze gelangt:

> In jedem Dreieck, wo eine Seite das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern ist, sind die Entfernungsörter parallel der den mittlern Dreieckswinkel halbierenden Geraden.

34. Zu demselben Resultat hätte man auch noch auf einem andern und zwar kürzern Wege gelangen können.

Ist (Fig. 8) Dreieck ABC ein solches, in welchem $a = \frac{b + c}{2}$, also auch $c - a = a - b$, so muss, wenn VIH der zur mittlern Seite a gehörige Ort ist, $AI = AH$, mithin $AIH = AHI = \frac{1}{2} IAC = \frac{1}{2} A$ sein.

35. Da wir früher (27) gezeigt haben, dass

$$\frac{BV}{CV} = \frac{IA}{HA},$$

und, wie wir so eben gesehen,

$$\frac{IA}{HA} = 1$$

so mus V der Halbierungspunkt von BC sein; also

In jedem Dreieck, wo eine Seite das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern, geht der zur erstern gehörige Entfernungsort durch deren Halbierungspunkt.

36. Da, wie wir bereits wissen, der Werth für das Aggregat einer Ternion von Senkrechten des zur Seite a gehörigen Ortes dargestellt wird durch

$$(-a + b + c) \sin A$$

so wird für unsern besondern in Rede stehenden Fall dieser Werth offenbar

$$\tfrac{1}{2}(b + c) \sin A$$

d. h. ist in einem Dreieck eine Seite das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern, so ist das Aggregat jeder Ternion von Senkrechten des zu ihr gehörigen Ortes das arithmetische Mittel zwischen den zu den beiden andern Seiten gehörigen Höhen.

37. Ist AZ (Fig. 8) Winkelhalbierende, so ist

$$BZ : BA = BV : BI = BV : BC = 1 : 2$$

also

$$BZ = \tfrac{1}{2} BA \text{ und darum auch } CZ = \tfrac{1}{2} CA$$

d. h. ist in einem Dreieck eine Seite das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern, so wird dieselbe durch die ihren Gegenwinkel Halbierende in zwei Segmente getheilt, von denen jedes halb so gross ist als die ihm anliegende Dreiecksseite.

38. Aus 32, Zus. folgt in Verbindung mit 33 noch, dass in Dreiecken von der mehr genannten Beschaffenheit der Sinus jedes der beiden Winkel, unter denen die mittlere Seite von einem Entfernungsort geschnitten wird, doppelt so gross ist als der Sinus des halben Gegenwinkels dieser Seite.

39. Ein Dreieck, in welchem eine Seite das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern ist, kann man ein nach den Seiten halb regelmässiges nennen, und in ähnlicher Weise denjenigen, wo ein Winkel das Mittel zwischen den beiden andern ist, den Namen von halbregelmässigen nach den Winkeln geben.

Diese beiden Arten von Dreiecken verdienen viel mehr Beachtung, als sie bisher gefunden zu haben scheinen. Sie besitzen eine grössere Anzahl von Eigenschaften, die schon an sich bemerkenswerth sind, die aber namentlich den Lernenden, wie ich aus Erfahrung weiss, viel Interesse gewähren, und daher dem Lehrer ein zu fruchtbaren geometrischen Uebungen recht geeignetes Material liefern. Insbesondere liegt viel Belehrendes und den strebsamen Schüler Anziehendes in dem Umstande, dass Schwerpunkt und Mittelpunkt des innern Kreises für das eine, nach den Seiten halbregelmässige, Dreieck dieselbe Rolle übernehmen, welche Höhendurchschnitt und Mittelpunkt des äussern Kreises in dem andern haben. Ich empfehle daher diese Dreiecke der Aufmerksamkeit der Lehrer.

40. Vielleicht fragt hier der eine und der andere Leser, ob das, was so eben von den beiden halbregelmässigen Dreiecken gesagt ist, nicht auch in Beziehung auf die Entfernungsörter gelte, d. h. ob diese Dreiecke nicht auch für diese Liniengattung besondere und bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen?

Für die nach den Seiten halbregulären Dreiecke kann als Antwort auf die Frage das angesehen werden, was in den Paragraphen **30** sqq enthalten ist; für die andere Gattung von Dreiecken mag hier noch Folgendes bemerkt werden.

In jedem nach seinen Winkeln halb regelmässigen Dreieck geht der zur mittlern Seite gehörige Entfernungsort durch den Mittelpunkt des innern Kreises.

Man kann sich leicht von der Richtigkeit unserer Behauptung auf folgende Weise überzeugen:

Soll ein Entfernungsort, z. B. der zur Seite a gehörige, durch das Centrum des innern Kreises gehen, so muss der Werth für das Aggregat jeder Ternion von Senkrechten das Dreifache vom Radius dieses Kreises betragen, weil ja offenbar eine dieser Ternionen, — die von dem Mittelpunkte des Kreises aus gefällten Senkrechten — diesen Werth hat.

Darum und wegen des früheren Satzes (18) erhalten wir

$$3\, r = 4\, r \cos^2 \frac{A}{2}$$

also

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \tfrac{3}{4}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \tfrac{1}{4}$$

und darum nach bekanntem Satze

$$\frac{A}{2} = 30^0$$

Soll also der zur Seite a gehörige Entfernungsort durch den Mittelpunkt des innern Kreises gehen, so muss ihr Gegenwinkel 60^0 d. h. das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern, das Dreieck also ein nach den Winkeln halb reguläres sein.

Zus. Die drei äussern Winkelhalbierenden schneidet dieser Entfernungsort in Punkten, die um das Dreifache der Länge des Radius des innern Kreises von den Gegenseiten der halbierten Aussenwinkel entfernt sind.

Anmerkung. Es würde sich noch eine Anzahl anderer nicht uninteressanter Beziehungen für die Entfernungsörter solcher Dreiecke nachweisen lassen, wenn es in unserer Absicht läge, diesen Gegenstand hier ins Einzelne zu verfolgen.

41. Mehr als einmal haben wir bisher zu bemerken Gelegenheit gehabt, dass die Excentricität eines Dreiecks in die einzelnen dessen Entfernungsörter betreffenden Eigenschaften enger verflochten ist, als man es anfangs vermuthen mochte. Ungesucht bietet sich daher die Frage

dar, welches denn die Lage unserer Entfernungsörter gegen diese Gerade sein möge? Zur Beantwortung derselben dient Folgendes. Es sei MI (Fig. 9) die Excentricität des Dreiecks ABC; MK und IL senkrecht auf BC und letztere verlängert bis sie die durch M mit BC parallel gezogene Gerade in O schneidet

Alsdann ist:

$$\sin \hat{OIM} = \frac{OM}{IM} = \frac{KL}{e} = \frac{BK - BL}{e}$$

also auch

$$\sin OIM = \frac{a - (a - b + c)}{2\ e}$$

$$= \frac{b - c}{2\ e}$$

$$= (\sin B - \sin C)\ \frac{R}{e}$$

Die rechte Seite unserer Gleichung ist aber nichts anders, als der früher (32) gefundene Werth für den Sinus der Winkel, unter denen die Seite a von den Entfernungsörtern geschnitten wird. Wir sehen also, dass die beiden Winkel, unter denen eine auf a Senkrechte von der Excentricität geschnitten wird, einzeln gleich sind denen, welche a selbst mit den Entfernungsörtern bildet. Daraus aber folgt nothwendig, dass die Entfernungsörter senkrecht auf der Excentricität stehen.

Wir erhalten demnach den bemerkenswerthen Satz:

Die drei Entfernungsörter jedes Dreiecks schneiden dessen Excentricität unter rechten Winkeln.

Zus. 1. Bezeichnet man daher die Winkel, unter denen die Excentricität den Seiten a, b, c (von denen b die mittlere, a die grösste und c die kleinste sein soll) begegnet, beziehlich durch α, β, γ, so ist

$$\cos\alpha = (\sin B - \sin C) \cdot \frac{R}{e}$$

$$\cos\beta = (\sin A - \sin C) \cdot \frac{R}{e}$$

$$\cos\gamma = (\sin A - \sin B) \cdot \frac{R}{e}$$

Daher ist

Zus. 2. $$\cos\beta = \cos\alpha + \cos\gamma$$

Zus. 3. Unter den drei Winkelpaaren, welche die Excentricität mit den drei Seiten bildet, ist das zur mittlern Seite gehörige dasjenige, dessen Winkel sich am meisten von der Grösse eines Rechten entfernen.

Zus. 4. Die drei Winkelpaare, welche die Excentricität mit den Dreieckshöhen bildet, sind einzeln denen gleich, unter welchen die zu den Höhen zugehörigen Seiten von den Entfernungsörtern geschnitten werden.

42. Wir kehren jetzt noch einmal zu den Kreisen zurück, die sich um die Dreiecke AHI, BFG und CDE beschreiben lassen und von denen wir schon früher (28) nachgewiesen haben, dass sie von gleicher Grösse und zwar, dass ihre Radien gleich der Excentricität des Dreiecks sind.

Der Kürze halber wollen wir in dem Nachfolgenden diese Kreise, wenn von allen dreien die Rede ist, mit dem Namen der g l e i c h e n Kreise bezeichnen, und sie von einander nach ihren Mittelpunkten als die Kreise um K, um L, um N unterscheiden.

Da (Fig. 10) $AE = AB$, und $AG = AC$, und darum auch

$$AE \, . \, AC = AB \, . \, AG$$

so ist der Punkt A ein Punkt gleicher Potenzen für die beiden Kreise um L und N, mithin die von A aus auf LN gefällte Senkrechte Potenzlinie der beiden genannten Kreise. Dieselbe muss überdies wegen der Gleichheit unserer Kreise der Axe LN im Halbierungspunkte X begegnen.

Demnach ist nicht nur $LA = NA$ sondern auch $LAX = NAX$, und darum, weil, wie von selbst klar, $\triangle ABL \cong \triangle AEN$,

$$B\hat{A}X = C\hat{A}X$$

d. h. die den Winkel A des Urdreiecks Halbierende ist die Potenzlinie für die beiden Kreise um L und N.

Ganz in derselben Weise lässt sich zeigen, dass die die Winkel B und C Halbierenden einzeln die Potenzlinien bilden für die Kreispaare K, N und K, L.

Wir erhalten so den

Lehrsatz: Die innern Winkelhalbierenden des Urdreiecks bilden für die drei gleichen Kreise die Potenzlinien.

43. Daher ist

a. Der Mittelpunkt P vom innern Kreise des Urdreiecks der Punkt gleicher Potenzen für die drei gleichen Kreise.

b. Dieser Punkt P zugleich auch Mittelpunkt sowohl für einen Kreis, den die drei gleichen von aussen, als auch für einen, den sie von innen berühren.

c. Für den erstern dieser beiden genannten Kreise ist der Radius $R - e$, für den letztern $R + e$.

d. Die von P aus an die drei gleichen Kreise gezogenen Tangenten sind (in den zwischen P und den Berührungspunkten enthaltenen Segmenten) von gleicher Grösse, und zwar ist jede derselben die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des äussern und dem Radius des innern Kreises vom Urdreieck.

Denn aus einer bekannten Eigenschaft des Kreises in Verbindung mit dem unmittelbar Vorgehenden (c) folgt, dass das Quadrat einer solchen Tangente gleich ist

$$(R + e)(R - e) = R^2 - e^2 = 2\,Rr$$

e. Da nun aber bekanntlich jede durch den Mittelpunkt des innern Kreises eines Dreiecks gezogene Sehne des äussern in diesem Mittelpunkt in zwei Segmente getheilt wird, deren Rechteck $= 2$ Rr ist, so muss

$$AP \cdot PY = PA \cdot PZ$$

und darum auch

$$PY = PZ$$

d. h. jede innere Winkelhalbierende des Urdreiecks, nachdem man sie verlängert hat bis zum zweiten Durchschnitt mit der Peripherie sowohl des äussern Kreises vom Urdreieck als desjenigen der drei gleichen Kreise, welcher mit der Winkelhalbierenden durch einerlei Ecke des Urdreiecks geht, hat den Mittelpunkt des innern Kreises zum Halbierungspunkt.

f. Schneiden sich unsere gleichen Kreise, so liegt jedes Paar zusammengehöriger d. h. durch die Peripherieen desselben Kreispaares gebildeter Durchschnittspunkte mit einer der Ecken des Urdreiecks in gerader Linie.

44. Auch die äussern Winkelhalbierenden des Urdreiecks bilden Potenzlinien und zwar für die drei Kreispaare, welche man dadurch erhält, dass man den äussern Kreis des Urdreiecks mit je einem der drei gleichen verbindet.

Denn zieht man CU, die gemeinschaftliche Sehne eines unserer eben genannten Kreispaare, so ist (wenn man sich noch U sowohl mit A und B, als mit D und E verbunden denkt), $\triangle BDU \cong \triangle AEU$, weil sie ein Seitenpaar und zwei Winkelpaare gleich haben, darum die Dreiecke ABU und DEU gleichschenkelig, also, weil $DUE = C$, $DCU = DEU = \frac{1}{2}(A + B)$; darum CU äussere Winkelhalbierende der Ecke C.

Zus. 1. Daher sind die Mittelpunkte der Berührungskreise des Urdreiecks die vier Punkte gleicher Potenzen für die vier Ternionen von Kreisen, welche sich aus dem äussern Kreise des Urdreiecks und den drei gleichen Kreisen bilden lassen.

Zus. 2. Aus unserem Beweise ergiebt sich noch, dass die Mittelsenkrechten von AB und DE sich in dem Punkte schneiden, welchen die Peripherieen der Kreise um ABC und DEC neben C als zweiten Durchschnittspunkt haben.

45. Da CU und KL einander parallel, als beide senkrecht auf der innern Winkelhalbierenden CPS, da ferner ON und CU als Axe und gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise auf einander senkrecht, so schneidet NO verlängert auch KL unter rechten Winkeln; eben so ist es mit LO in Beziehung auf KN und mit KO für LN d. h.

der Mittelqunkt des äussern Kreises vom Urdreieck bildet den Höhendurchschnitt für das Mittelpunktsdreieck KLN.

46. Da BLOP ein Antiparallelogramm, weil $BP \parallel LO$, als beide senkrecht auf KN, und BL als Radius eines der drei gleichen Kreise nach dem frühern Satze (29) gleich der Excentricität PO des Urdreiecks, so sind auch dessen Diagonalen von gleicher Länge, also

$$PL = BO$$

d. h. die äussern Kreise des Urdreiecks und des Mittelpunktsdreiecks sind von gleicher Grösse.

47. Da die Seiten des Dreiecks KLN senkrecht auf den innern Winkelhalbierenden des Urdreiecks stehen, so sind die Winkel desselben von gleicher Grösse mit denen, unter welchen sich die Winkelhalbierenden schneiden, also jeder gleich der halben Summe zweier Winkel des Urdreiecks.

Da nun, nach bekanntem Satze

$$\triangle KLN = 2\,R^2 \,.\, \sin LKN \,.\, \sin KLN \,.\, \sin KNL,$$

so ist auch

$$\triangle KLN = 2\,R^2 \cos\frac{A}{2} \,.\, \cos\frac{B}{2} \,.\, \cos\frac{C}{2}$$

$$= \frac{2\,R^2 \,.\, 8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}{8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\,R^2 \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\frac{2\,r}{R}}$$

$$\triangle KLN = \frac{R}{2\,r} \,.\, \triangle$$

Zus. 1. Es ist also $\triangle$KLN grösser als das Urdreieck, so lange das letztere ungleichseitig, und zwar desto grösser, je ungleichseitiger ABC ist.

Zus. 2. Dagegen behauptet unsere Formel, dass wenn das Urdreieck gleichseitig, also $R = 2\,r$ sei, das Mittelpunktsdreieck KLN ihm an Grösse gleich sei. Dies ist insofern richtig, als die Dreiecke AHI, BFG, CDE für diesen Fall in Punkte zusammenschwinden, die mit den Ecken des Urdreiecks zusammenfallen, wo also die Mittelpunkte der äussern Kreise dieselben Punkte sind, also K, L, N beziehungsweise mit A, B und C zusammenfallen, also beide Dreiecke nur ein einziges werden.

48. Da wie bekannt

$$r = \frac{2\,\triangle}{a + b + c},$$

also

$$\frac{\triangle}{2\,r} = \tfrac{1}{4}\,(a + b + c),$$

so ist

$$\triangle KLN = \tfrac{1}{4}\,(a + b + c) \,.\, R$$

d. h. das Mittelpunktsdreieck ist viermal so klein als das Rechteck aus dem Umfange des Urdreiecks und dem Radius seines äussern Kreises.

49. Bezeichnet δ den Flächenraum des Dreiecks, dessen Spitzen die Berührungspunkte des innern Kreises bilden, so ist bekanntlich

$$\delta = \frac{r}{2R} \cdot \triangle,$$

also

$$4\,\delta \,.\, \triangle KLN = \frac{2\,r}{R} \cdot \triangle \cdot \frac{R}{2\,r} \cdot \triangle$$
$$= \triangle^2$$

d. h. Das Urdreieck ist die mittlere Proportionalfläche zwischen dem Mittelpunktsdreieck KLN und zwischen dem Vierfachen des durch die Berührungspunkte des innern Kreises bestimmten Dreiecks.

50. Verbindet man den Mittelpunkt des äussern Kreises eines Dreiecks mit den Endpunkten einer der Seiten, so bildet, wie bekannt, jeder dieser Radien mit dieser Seite einen Winkel, der das Complement zum Gegenwinkel dieser Seite ist. Demgemäss ist LKP gleich dem Complement zu KNL d. i., wie wir aus (47) wissen, zu $\frac{1}{2}$ (A + B), es ist mithin LKP $= \frac{1}{2}$ C; daher sind die beiden Dreiecke KPS und CPQ ähnlich, also auch CQP = KSP = 90^0 also steht die Gerade KPQ senkrecht auf BC und ist darum = R + r, und wir sind so zu dem Satz gelangt:

Die Mittelpunkte unserer drei gleichen Kreise sind einzeln von den einzelnen Seiten des Urdreiecks gleich weit entfernt und zwar um die Summe der Radien des äussern und innern Kreises vom Urdreieck.

51. Da die Entfernungen des Mittelpunktes des äussern Kreises von den Seiten a, b, c durch R cos A, R cos B, R cos C dargestellt werden, also das Aggregat dieser Entfernungen durch

$$R\,(\cos A + \cos B + \cos C) = R\left(1 + 4 \sin\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2}\right) = R + r,$$

so ergiebt sich hieraus der bemerkenswerthe Satz:

Die Entfernung jedes der drei Mittelpunkte von einer der Seiten des Urdreiecks ist gleich dem Aggregat der Entfernungen des Mittelpunktes des äussern Kreises von allen drei Seiten.

52. Zieht man in einem unserer drei gleichen Kreise den Radius nach demjenigen Durchschnittspunkt seiner Peripherie mit der des äussern Kreises vom Urdreieck, der nicht eine der Ecken dieses Dreiecks bildet, z. B. in dem Kreise um N den Radius NU, so ist das Viereck POUN ein Parallelogramm, weil nach dem, was wir in frühern Sätzen nachgewiesen haben, beide Paare der Gegenseiten einzeln gleich sind; daher ist NU parallel der Excentricität und darum senkrecht auf der Richtung der Entfernungsörter; also

die drei Radien unserer drei gteichen Kreise, welche durch diejenigen Durchschnittspunkie mit der Peripherie des Urdreiecks bestimmt werden, welche nicht mit Ecken des Urdreiecks zusammenfallen, sind unter einander parallel und zwar stehen sie senkrecht auf den Entfernungsörtern.

53. *Dagegen ist die Potenzlinie VW der beiden gleichen Kreise um ABC und KLN, weil sie auf der Excentricität PO, als der die Axe dieser beiden Kreise bildenden Geraden, senkrecht steht, mit unsern Entfernungsörtern parallel.*

54. Da in dem Rhombus PVOW die Quadratsumme der Seiten so gross ist als die Quadratsumme der Diagonalen, so ist

$$\begin{aligned} \overline{VW}^2 &= 4\ R^2 - \overline{PO}^2 \\ &= 4\ R^2 - (R^2 - 2\ R\ r) \\ &= R\ (3\ R + 2\ r) \end{aligned}$$

d. h. die gemeinschaftliche Sehne der beiden gleichen Kreise um ABC und KLN ist das geometrische Mittel zwischen dem Radius des äussern Kreises und dem um dem Durchmesser des innnern Kreises verlängerten dreifachen Radius eben dieses äussern Kreises.

55. Construiert man die Potenzlinie für den Kreis um KLN und einen der drei gleichen Kreise z. B. den um K, so muss diese Gerade $\alpha\beta$ weil sie senkrecht auf PK, und wir bereits nachgewiesen haben, dass PK senkrecht auf BC, dieser letztgenannten Seite des Urdreiecks parallel sein. Aehnliches gilt natürlich für die beiden andern Potenzlinien.

Zus. 1. Diese drei Potenzlinien bilden also bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, welches dem Urdreieck ähnlich ist.

Zus. 2. Und zwar liegen dessen Spitzen auf den Winkelhalbierenden des Urdreiecks, da ja je zwei dieser Seiten als Potenzlinien mit der Potenzlinie eines Paares der drei gleichen Kreise, also mit einer innern Winkelhalbierenden des Urdreiecks einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben müssen.

Zus. 3. Die innern Winkelhalbierenden des Urdreiecks gehören daher als solche auch zugleich dem neuen Dreieck an.

Zus. 4. Darum sind die innern Kreise der beiden genannten Dreiecke concentrisch.

Zus. 5. Auch von den Mittelpunkten unserer drei gleichen Kreise sind die Seiten des neuen Dreiecks gleich weit entfernt, und zwar um den Unterschied zwischen der Länge von R und der vom Radius des innern Kreises unseres neuen Dreiecks.

Zus. 6. Dieser Radius des innern Kreises vom neuen Dreieck ist

$$\frac{R}{2} + r$$

also um die Hälfte des Halbmessers vom äussern Kreise des Urdreiecks grösser als der Radius des innern Kreises dieses Dreiecks.

Denn bezeichnet man durch δ den Durchschnittspunkt zwischen PK und $\alpha\beta$, so ist $P\delta$ die Länge unseres Radius.

In dem Dreieck $P\alpha K$ ist nun aber:

$$\overline{P\delta}^2 - \overline{K\delta}^2 = \overline{P\alpha}^2 - \overline{K\alpha}^2,$$

$$(P\delta + K\delta)(P\delta - K\delta) = R^2 - R'^2$$

$$R \cdot (R - 2\,K\delta) = R^2 - (R^2 - 2\,Rr)$$

$$= 2\,Rr$$

$$R - 2\,K\delta = 2r$$

$$K\delta = \frac{R}{2} - r,$$

$$\text{also}\quad P\delta = R - \left(\frac{R}{2} - r\right)$$

$$= \frac{R}{2} + r$$

Zus. 7. Die Entfernung je zweier paralleler Seiten des Urdreiecks und des neuen Dreiecks ist.

$$\frac{R}{2} + 2r$$

Zus. 8. Die den Seiten a, b, c des Urdreiecks parallelen Seiten des neuen Dreiecks haben zu Längenwerthen die Ausdrücke

$$\frac{R + 2r}{2r} \cdot a, \frac{R + 2r}{2r} \cdot b, \frac{R + 2r}{2r} \cdot c.$$

56. Nach einer bekannten Eigenschaft der Vierecke haben die Peripherieen derjenigen vier Kreise, welche sich um die durch Verlängerung von je zwei Gegenseiten bis zum Durchschnitt entstandenen Dreiecke beschreiben lassen, einen gemeinsamen Durchschnittspunkt. Die Fusspunkte der von diesem Durchschnitt auf die Vierecksseiten gefällten Senkrechten liegen in gerader Linie.

Demnach liegen die Fusspunkte der von U auf AB, AC, BC, DE gefällten Senkrechten in gerader Linie. Wir wissen aber bereits aus 43, Zus. 2, dass diese Fusspunkte für die Seiten AB und DE mit deren Halbierungspunkten zusammenfallen. Da ferner, wie wir ebenfalls wissen, CU äussere Winkelhalbierende ist, so müssen die Segmente, die durch die beiden übrigen Senkrechten auf CB und auf der Verlängerung von CA von C aus abgeschnitten werden, von gleicher Länge sein. Dieser letztere Umstand aber macht es nothwendig, dass unsere durch die vier Fusspunkte bestimmte Gerade parallel der durch C gehenden innern Winkelhalbierenden ist. Wir erhalten also den

> Lehrsatz: Hat ein Viereck drei gleiche Seiten und man verbindet die Halbierungspunkte der vierten und ihrer Gegenseite unter einander, so ist diese Verbindende parallel der Geraden, welche den von den beiden übrigen gleichen Seiten gebildeten Winkel halbiert.

57. Aehnliches wie für den Punkt U gilt natürlich für die beiden ihm entsprechenden Punkte, in denen die Peripherie vom äussern Kreise des Urdreiecks durch die Peripherieen der beiden

andern von den drei gleichen Kreisen geschnitten wird. Man erhält demnach die drei Geraden auf denen einzeln die Fusspunkte der drei Quaternionen von Senkrechten liegen, wenn man durch die Halbierungspunkte der Seiten des Urdreiecks Gerade zieht, welche den die Gegenwinkel dieser Seiten halbierenden parallel sind. Diese drei Geraden aber haben nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und zwar liegt derselbe mit dem Schwerpunkt und dem Mittelpunkt des innern Kreises dergestalt in gerader Linie, dass er von dem zwischen den beiden andern liegenden Schwerpunkt halb so weit entfernt ist, als dieser selbst vom Mittelpunkt. Wir gewinnen so den

> Lehrsatz: Die drei Punkte, in denen die Peripherie vom äussern Kreise des Urdreiecks die Peripherieen unserer drei gleichen Kreise schneidet und die nicht Ecken des Urdreiecks sind, haben die Eigenschaft, dass nicht nur die Fusspunkte der Senkrechten, die man von einem derselben auf die Seiten des Urdreiecks und auf denjenigen Entfernungsort fällt, der zu der Seite gehört, durch deren Gegenecke der betreffende Kreis geht, in gerader Linie liegen, sondern dass auch diese so entstandenen drei Geraden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben und zwar den Mittelpunkt des innern Kreises für dasjenige Dreieck, dessen Spitzen mit den Halbierungspunkten der Seiten des Urdreiecks zusammenfallen.

Anmerkung 1. Die bei der Entwickelung des vorstehenden Satzes erwähnte und benutzte Eigenschaft der Dreiecke, welche, wenn ich nicht irre, zuerst in Gergonne's Annalen zur Sprache gebracht wurde, ist folgende:

Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 11) drei Transversalen AD, BE, CF so, dass sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt K haben und mit ihnen einzeln durch die Halbierungspunkte G, H, I der ihnen zugehörigen Seiten Parallelen, so haben auch diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt L, welcher mit K und dem Dreiecks-Schwerpunkt S in gerader Linie liegt und zwar so, dass L der über S hinausgehenden Verlängerung von KS angehört und KS = 2 SL ist. Ausserdem ist AK = 2 GL, BK = 2 HL, CK = 2 IL. Bew. Durch G und H ziehe man Parallen mit AD und BE, verbinde deren Durchschnittspunkt L mit I, und zeige, dass LI ‖ CF ist. Zu diesem Ende verlängere man die drei Geraden LG, LH, LI über G, H und I hinaus jede um ihre eigne Länge.

Es sind darnach die Vierecke AOBL, BMCL und CLAN, weil in jedem die Diagonalen sich gegenseitig halbieren, Parallelogramme; also BM $\#$ CL $\#$ AN, darum auch AB $\#$ MN, nnd mithin, weil auch AD ‖ LM und BE ‖ LN, $\triangle$ABK $\cong$ $\triangle$ LMN, also auch die Vierecke AKLM und BKNL, da je ein Paar Gegenseiten gleich und parallel, Parallelogramme; demnach KN $\#$ BL $\#$ AO, also auch KO $\#$ AN $\#$ CL, aiso auch CKLO ein Parallelogramm, mithin IL ‖ FC.
Da bewiesen ist, dass AK = LM, so ist offenbar AK = 2 GL etc.

Zieht man endlich die beiden Seitenhalbierenden AG und BH, um in ihrem Durchschnitt S den Schwerpunkt zu erhalten, und verbindet S mit K und L, so sind die beiden Dreiecke AKS und GLS, weil AK = 2 GL, AS, wie bekannt, = 2 GS und $\widehat{KAS} = \widehat{SGL}$, einander ähnlich, also auch $\widehat{ASK} = \widehat{LSM}$, also liegen K, S und L in gerader Linie und ist KS = 2 SL.

Anmerkung 2. Die so eben erwiesene Eigenschaft der Dreiecke ist ein besonderer Fall folgenden allgemeineren Satzes:

Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 12) drei beliebige nur nicht einander parallele Transversalen AD, BE, CF und durch die Halbierungsqunkte ihrer zugehörigen Seiten mit ihnen parallel die Geraden GO, HN, IP, so steht das von den drei ersteren Linien gebildete Dreieck KLM zu dem der drei letzleren NOP in einer solchen Beziehung, dass jede Seite von diesem halb so gross ist als die ihr parallele Seite von jenem, die Schwerpunkte beider Dreiecke mit dem des Urdreiecks in gerader Linie liegen und zwar der letztere zwischen jenen beiden und vom Schwerpunkt des Dreiecks KLM noch einmal so weit entfernt, als von dem des andern. Auch sind die Segmente, welche auf einer Transversale (von der Dreiecksspitze aus gerechnet) durch die beiden andern gebildet werden, einzeln doppelt so

gross als die Stücken, welche auf der mit der ersten Transversale parallelen Mittellinie vom Halbierungspunkt der Dreiecksseite aus durch die beiden andern Mittellinien abgeschnitten werden, also AK = 2 GN, AL = 2 GO etc.

Man ziehe GH; weil nun △ABK ∾ △GHN und AB = 2 GH, so ist auch AK = 2 GN und BK = 2 HN und in gleicher Weise AL = 2 GO, BM = 2 HP, CL = 2 IO und CM = 2 IP, also KL = AL — AK = 2 (GO — GN) = 2 NO; eben so KM = 2 NP und LM = 2 OP.

Es seien S' und S'' die Schwerpunkte der Dreiecke KLM und NOP; wegen der gegenseitigen Lage und Grösse dieser Dreiecke, wie wir sie bereits kennen, ist KS' ∥ NS'' und KS' = 2 NS''; zieht man also die beiden Geraden KN und S'S'', nennt ihren Durchschnittspunkt S, so ist △KSS' ∾ △NSS'' und SS' = 2 SS'', so wie KS = 2 NS Zieht man jetzt AG und nennt ihren Durchschnitt mit KN vorläufig S''', so ist, weil △AKS''' ∾ △GNS''' und AK = 2 GN, auch KS''' = 2 NS''', also fallen S und S''' zusammen, und S ist, weil AS = 2 GS, der Schwerpunkt des Urdreiecks.

Es ist leicht zu sehen, wie dieser Satz den in der vorigen Anmerkung mitgetheilten als speciellen Fall in sich schliesst.

58. Wir haben bisher die äussern Kreise blos derjenigen Dreiecke betrachtet, welche die Entfernungsörter mit den nicht zugehörigen Seiten bilden. Es giebt aber ausserdem noch sechs Kreise, zu den drei Dreieckspaaren gehörig, von denen jedes durch einen Entfernungsort mit der zugehörigen Seite und je einer der nicht zugehörigen gebildet wird.

Diese sämmtlichen neun Kreise sondern sich naturgemäss in eben der Weise wie die Dreiecke, zu denen sie gehören, in drei Gruppen. Von den Dreiecken nämlich sind je drei solche, zu deren Entstehung dasselbe Seitenpaar des Urdreiecks mitwirkt, ähnlich und bilden als solche einen engeren Verein unter einander. Es entstehen auf diese Weise drei Kreisternionen. Wir unterscheiden in jeder Ternion einen Hauptkreis und zwei Nebenkreise; unter ersteren verstehen wir denjenigen, welcher einer der drei unter dem Namen der gleichen Kreise uns bereits bekannten ist, unter Nebenkreisen die beiden andern.

Zuvörderst ist nun leicht zu sehen, und auch früher (26) bereits bemerkt worden, dass die sechs Nebenkreise paarweise einander gleich sind, und zwar je zwei solche, welche zu Dreiecken gehören, die durch einen und denselben Entfernungsort gebildet werden; so z. B. die Kreise der Dreiecke QAE und QBD (Fig. 6), weil offenbar

$$\frac{AE}{2 \sin AQE} = \frac{BD}{2 \sin BQD}.$$

59. Bezeichnet 'R den Radius jedes der beiden Nebenkreise, welche zu den Dreiecken gehören, die von dem zur Seite a gehörigen Entfernungsort gebildet werden, und haben ''R und '''R dieselbe Bedeutung für die beiden andern Orte, so ist

$$'R = \frac{BI}{2 \sin BVI}$$

$$= \frac{a}{2 \sin CDE} = \frac{a}{b - c} \cdot e \ (32)$$

$$\text{Also } ''R = \frac{b}{a - c} \cdot e$$

$$'''R = \frac{c}{a - b} \cdot e$$

60. Hieraus ergiebt sich:

a. dass, wenn AU (Fig. 6a) äussere Winkelhalbierende ist, und man, wie gewöhnlich, $BU = a'$ $CU = a''$ setzt, und wenn b', b'' und c', c'' ähnliche Bedeutung für die durch B und C gehenden äussern Winkelhalbierenden haben,

$$'R = \frac{a''}{b} R' = \frac{a'}{c} . R'$$

$$''R = \frac{b'}{a} . R'' = \frac{b''}{c} . R''$$

$$'''R = \frac{c'}{b} R''' = \frac{c''}{a} . R'''$$

da ja, wie bekannt, $\frac{a''}{b} = \frac{a'}{c} = \frac{a}{b-c}$ etc. ist.

b. dass alle Nebenkreise grösser sind als die Hauptkreise, da ja e gleich dem Radius der Hauptkreise und jeder der drei Brüche $\frac{a}{b-c}$, $\frac{b}{a-c}$, $\frac{c}{a-b}$ grösser als Eins ist.

c. dass die Nebenkreise niemals alle unter einander gleich sein können, während die Hauptkreise, wie wir bereits wissen, es immer sein müssen, dass namentlich, wenn

$$a > b > c$$

stets $'R > ''R$ ist, weil ja alsdann offenbar $\frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}$

d. Dass auch stets

$$'''R > ''R$$

$$\text{weil } \frac{c}{a-b} - \frac{b}{a-c} = \frac{(-a+b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)}$$

also der Unterschied $\frac{c}{a-b} - \frac{b}{a-c}$ additiv ist, mithin jederzeit die beiden Nebenkreise derjenigen Dreiecke die kleinsten sind, welche der zur mittlern Dreiecksseite gehörige Entfernungsort bildet.

61. Von selbst bietet sich die Frage dar, wie es um die Grössenbeziehung von $'R$ und $'''R$ stehe? Dieselbe verdient auch darum eine nähere Erörterung weil man bei ihrer Entscheidung nicht so unmittelbar und einfach zum Ziele gelangt, wie man nach den entsprechenden Untersuchungen über die beiden Halbmesserpaare $'R$, $''R$ und $''R$, $'''R$ zu erwarten geneigt ist. Zwar hängt die Antwort auf die Frage, welcher von den beiden Radien $'R$ und $'''R$ der grössere sei, allerdings davon ab, ob der Unterschied

$$\frac{a}{b-c} - \frac{c}{a-b}$$

additiv oder subtractiv sei, allein die nächste und natürlichste Umgestaltung desselben, der Ausdruck

$$\frac{a^2 + c^2 - (a+c)\,b}{(a-b)(b-c)}$$

entbehrt derjenigen Form, die geeignet wäre, um unmittelbar und mit Sicherheit das Vorzeichen des Zählers zu bestimmen. Wir müssen daher einen etwas andern Weg einschlagen.

Setzen wir $a = nb$, $b = rc$, also $a = nrc$, wo wegen der ausdrücklich gemachten Voraussetzung, nach welcher $a > b > c$, sowohl n als r grösser als Eins sein müssen, so ist

$$\frac{a}{b-c} - \frac{c}{a-b} = \frac{nr}{r-1} - \frac{1}{r(n-1)}$$
$$= \frac{n(n-1)r^2 - r + 1}{r(n-1)(r-1)}$$

Soll also der die linke Seite unserer Gleichung bildende Unterschied additiv sein, so muss

$$1 - r\left[1 - n(n-1)r\right] > o$$

$$\text{also auch } \frac{1}{r} - \left[1 - n(n-1)r\right] > o$$

$$\text{oder } n.(n-1)r > 1 - \frac{1}{r}$$

und mithin auch

$$n.(n-1) > \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\right) \text{ sein.}$$

So oft also die vorstehende Bedingung erfüllt ist, wird 'R grösser als '''R sein; das Gegentheil wird Statt finden, wenn

$$n.(n-1) < \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

Und beide Fälle sind möglich; denn während einerseits n, weil > 1, um so mehr $> 1 - \frac{1}{r}$ ist, muss andererseits stets $n - 1 < \frac{1}{r}$ sein, da ja nothwendig $b + c > a$ also $r + 1 > nr$, mithin $1 > r(n-1)$ und darum $n - 1 < \frac{1}{r}$ ist.

So würde z. B. der erste Fall Statt finden wenn $n = \frac{3}{2}$ und $r = \frac{5}{4}$ wäre, dagegen der zweite eintreten für die Werthe von $n = \frac{8}{7}$ und $r = \frac{3}{2}$.

Gleich gross werden natürlich 'R und '''R sein, wenn

$$n(n-1) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\right) \text{ oder}$$

$$n_2 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 = o \text{ ist.}$$

62. Zieht man zwischen den Schenkeln jedes von zwei Scheitelwinkeln eine beliebige Anzahl paralleler Linien und beschreibt um die Dreiecke, welche sie einzeln mit den Winkelschenkeln bilden, Kreise, so liegen deren Mittelpunkte unter sich und mit dem Winkelscheitel in gerader Linie. Denn zieht man an einen unserer Kreise in dem Punkte, welcher den Peripherieen aller gemeinschaftlich ist, — in dem Winkelscheitel — eine Tangente, so muss diese auch alle übrigen

Kreise in diesem Punkte berühren, als eine Gerade, welche für jeden der übrigen einer Kreis-Sehne in dem genannten Punkte unter Winkeln begegnet, welche den Winkeln in den Wechselabschnitten dieses Kreises gleich sind.

Unmittelbar ergiebt sich hieraus, dass von den neun Kreisen, welche sich um die von den Entfernungsörtern mit je zwei Urdreiecksseiten gebildeten Dreiecke beschreiben lassen, je drei solche, die nach unserer früheren Classificierung zu derselben Ternion gehören, unter sich und mit einer der Spitzen des Urdreiecks in gerader Linie liegen, oder, was dasselbe ist, dass die Mittelpunkte von je zwei zusammengehörigen Nebenkreisen auf einem Durchmesser ihres Hauptkreises liegen und zwar auf demjenigen, welcher durch die dem Hauptkreis zugehörige Spitze des Urdreiecks bestimmt wird.

63. Diese drei so eben genannten Hauptkreisdurchmesser haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und zwar liegt derselbe auf der Peripherie des äussern Kreises vom Urdreieck.

Denn da (Fig. 16) $AI = a - c = CD$ und $AM = IM = CK = DK$, so ist $DCK = MAI = BAY = BAO$
wo Y und O die Punkte sind, in denen die Seite BC und der durch C gehende Hauptkreisdurchmesser von dem durch A gehenden geschnitten werden.

Demnach sind die Dreiecke ABY und COY ähnlich, mithin $ABC = AOC$. also liegt O auf der Peripherie des Kreises um ABC; dasselbe lässt sich von dem Durchschnittspunkt jedes der beiden andern Paare der Hauptkreisdurchmesser erweisen, darum ist es nothwendig, dass jeder von den beiden andern in dem Punkte geschnitten wird, wo er selbst der Peripherie des Kreises um ABC zum zweitenmal (das erstemal geschieht es in einer der Ecken des Urdreiecks) begegnet.

64. Daher haben auch die drei Tangenten, welche sich durch die Spitzen des Urdreiecks an die einzelnen Kreisternionen ziehen lassen, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, der gleichfalls auf der Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises liegt. Er ist offenbar der andere Scheitel des durch O bestimmten Durchmessers dieses Kreises.

65. Jeder unserer Hauptkreisdurchmesser bildet mit jeder der beiden Seiten, durch deren gemeinschaftlichen Endpunkt er geht, einen Winkel, welcher den von der andern Seite mit den Entfernungsörtern gebildeten zu einem Rechten ergänzt. So ist (Fig. 16) z. B. $OAC = HAK =$ dem Complement von der Hälfte des Winkels AMH d. i. AIH.

Nun wissen wir bereits, dass die Excentricität des Urdreiecks jeder Seite unter Winkeln begegnet, welche die Winkel zwischen eben dieser Seite und den Entfernungsörtern einzeln zu einem Rechten ergänzen.

Hieraus ergiebt sich die bemerkenswerthe Beziehung:

> Zieht man nicht nur einen unserer Hauptkreisdurchmesser, sondern auch die Excentricität, verlängert letzere bis zum Durchschnitt mit den beiden Seiten, durch deren gemeinschaftlichen Endpunkt der Durchmesser geht, so ist der Winkel, unter welchem eine dieser Linien einer der beiden Dreiecksseiten begegnet, gleich dem, welchen die andere mit der andern Seite bildet.

66. Der gemeinschaftlihhe Durchschnittspunkt Z (Fig. 16) der vorher (64) genannten Tangenten hat gegen die Ecken des Urdreiecks eine solche Lage, dass seine Entfernung von der einen derselben so gross ist als die von den beiden andern zusammen.

Denn
$$BZ = 2\,R.\cos BZO = 2\,R \cos BCO$$
$$AZ = 2\,R \cos AZO = 2\,R.\cos ACO$$
$$CZ = 2\,R \cos CZO = 2\,R \cos CAO$$

Nun haben wir aber vorhin (65) nachgewiesen, dass die Winkel ACO, BCO und CAO einzeln gleich den Winkeln sind, welche die Excentricität mit den Urdreiecksseiten a, b, c bildet, und die wir früher ($41,_1$) mit α, β, γ bezeichnet und von ihnen nachgewiesen haben, dass $\cos\beta = \cos\alpha + \cos\gamma$; es ist daher auch

$$BZ = AZ + CZ.$$

67. So wenig auch die Beziehungen, welche unsere neun Kreise zu einander und zum äussern Kreis des Urdreiecks haben, durch das in den vorhergehenden Paragraphen darüber Beigebrachte als vollständig erörtert angesehen werden können, so verbieten doch die dieser Abhandlung gesteckten Gränzen diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen. Wir müssen vielmehr zu unsern Entfernungsörtern selbst zurückkehren, um noch auf die besondere Kraft hinzuweisen, die sie insofern besitzen, als sie im Stande sind, die Haupteigenschaft, die an ihnen nachgewiesen worden und der sie ihren Namen verdanken, auch allen den Geraden mitzutheilen, welche mit ihnen einerlei Lage haben oder ihnen parallel sind. Es sei N (Fig. 14) ein beliebiger Punkt auf Q'S', einer mit QS, dem Entfernungsort der Seite AB parallelen Geraden; von ihm aus seien auf die Dreiecksseiten die Senkrechten NK, NL, NO gefällt; alsdann ist, wenn man, wie schon früher geschehen, den Inhalt des Vierecks ABDE durch V bezeichnet.

$$V = \triangle NAB + \triangle NBD + \triangle NDE - \triangle NAE,$$
$$\text{also } \triangle NAB + \triangle NBD - \triangle NAE = V - \triangle NDE$$
$$\text{und darum } NO + NK - NL = \frac{2\,(V - \triangle NDE)}{c}$$

Der Werth von V ist nun, wie von selbst klar, ganz unabhängig von der Lage des Punktes N; aber auch dass Dreieck NDE ändert offenbar einem bekannten Elementarsatze zufolge seine Grösse nicht, so lange der Punkt N auf der Geraden Q'S' bleibt, wie er auch übrigens auf derselben sich verschieben mag. Es hat also auch $\frac{2\,(V - \triangle NDE)}{c}$ und somit das Aggregat $NO + NK - NL$ einen von der besondern Lage des Punktes N auf Q'S' unabhängigen Werth.

Ohne Schwierigkeit sieht man übrigens, dass, wenn Q'S' von dem parallelen Entfernungsort QS aus nicht, wie in unserer Figur, abwärts von C, der Gegenecke der zum Orte gehörigen Seite, sondern nach C hin läge, man erhalten würde

$$NO + NK - NL = \frac{2\,(V + \triangle NDE)}{c}$$

68. Umgekehrt haben zwei Punkte in der Ebene eines Dreiecks die Eigenschaft, dass die Aggregate ihrer Entfernungen von den Dreiecksseiten gleich gross sind, so liegen dieselben auf einer mit den Entfernungsörtern parallelen Geraden.

Es seien N und Q (Fig. 15) zwei solche Punkte, DE sei der zur Seite c gehörige Entfernungsort; von jedem der Punkte ziehe man Senkrechte nach den Dreiecksseiten; alsdann ist dem vorigen Paragraph zufolge:

$$NK - NL + NO = \frac{2\,(V - \triangle NDE)}{c}$$

$$QR + QS + QT = \frac{2\,(V - \triangle QDE)}{c}$$

Also, weil, unserer ausdrücklichen Annahme zufolge

$$NK - NL + NO = QR + QS + QT,$$

$$\text{auch } \frac{2\,(V - \triangle NDE)}{c} = \frac{2\,(V - \triangle QDE)}{c},$$

$$\text{darum auch } \triangle NDE = \triangle QDE$$

und desshalb, da N und Q auf einerlei Seite von DE liegen müssen, weil sonst $\triangle NDE = - \triangle QDE$ sein würde, was widersinnig wäre, $NQ \parallel DE$.

Käme ein dritter Punkt X hinzu, der die Eigenschaft von N und Q theilte, so müsste er sowohl mit N als mit Q auf einer den Entfernungsörtern parallelen Geraden d. h. er müsste auf der mit DE Parallelen NQ liegen.

So oft also beliebig viele Punkte in der Ebene eines Dreiecks die Eigenschaft haben, dass die Aggregate ihrer Entfernungen von den Dreiecksseiten von gleicher Grösse sind, so liegen sie alle auf einer den Entfernungsörtern des Dreiecks parallelen geraden Linie.

69. Bezeichnet man die Entfernung einer solchen Paralle Q'S' von einem der Entfernungsörter, wenn sie nach der Gegenecke von der dem Orte zugehörigen Dreiecksseite hin liegt durch $+ d$, im entgegengesetzten Falle durch $- d$, die Grösse des Aggregates der Entfernungen von den Dreiecksseiten für einen Punkt auf einer Parallele der ersteren Art durch $\Sigma_{(c,\,d)}\, p$, für Punkte auf Linien der andern Art durch $\Sigma_{(c,\,-d)}\, p$, behält die frühere Bezeichnung für $\frac{2V}{c}$ bei und erwägt, dass

$$\frac{2\,\triangle NDE}{c} = \frac{DE}{c}\,.\,d = \frac{e}{R}\,.\,d \;(29),$$

so erhält man

$$\Sigma_{(c,\,d)}\, p = \Sigma_{(c)}\, p + \frac{e}{R}\,.\,d$$

$$\Sigma_{(c,\,-d)}\, p = \Sigma_{(c)}\, p - \frac{e}{R}\,.\,d$$

Ganz ähnliche Beziehungen gelten natürlich für die beiden andern Entfernungsörter.

70. Aus den so eben entwickelten Sätzen ergiebt sich Folgendes:

a. $$\Sigma_{(a,\, d)}\, p + \Sigma_{(a,\, -d)}\, p = 2\, \Sigma_{(a)}\, p$$

d. h. zieht man zu beiden Seiten eines Entfernungsortes in gleichen Abständen Parallelen mit demselben, so ist die dem Orte selbst zugehörige Ternionlänge (das Aggregat der Entfernungen eines seiner Punkte von den Dreieckseiten) das arithmetische Mittel zwischen den Ternionlängen der beiden Parallelen.

b. Uederhaupt ist, so oft von drei beliebigen den Entfernungsörtern parallelen Linien die beiden äussern gleich weit von der mittlern entfernt sind, die Ternionlänge der mittlern Parallele das arithmetische Mittel zwischen denen der beiden äussern

c. Dagegen ist

$$\Sigma_{(a,\, d)}\, p - \Sigma_{(a,\, -d)}\, p = 2 \cdot \frac{e}{R} \cdot d$$

d. h. zwischen dem Ueberschuss der Ternionlänge einer unsrer beiden äussern Parallelen — für den Entfernungsort selbst als mittlere — über die der andern ist das arithmetische Mittel die vierte Proportionale zum Radius des äussern Kreises, der Excentricität und dem Abstand jeder Parallele vom Entfernungsort.

c. Zieht man eine Gerade parallel mit einem Entfernungsort durch eine der Spitzen des Dreiecks, so ist die Ternionlänge jedes ihrer Punkte so gross, als die Entfernung dieser Spitze von der Gegenseite.

d. Geht eine solche Parallele durch den Halbierungspunkt einer Dreiecksseite, so bildet die zu ihr gehörige Ternionlänge das arithmetische Mittel zwischen den zu den beiden andern Dreiecksseiten gehörigen Höhen.

e. Wenn man daher den Entfernungsörtern parallele Linien sowohl durch die drei Spitzen des Dreiecks, als auch durch die Halbierungspunkte seiner Seiten legt, so sind die Ternionlängen der drei erstern Parallelen zusammen so gross als die der drei letztern zusammen.

f. Die zu der durch den Mittelpunkt des äussern Kreises mit einem Entfernungsort parallel gezogenen Geraden gehörige Ternionlänge ist so gross als die Radien des äussern und innern Kreises vom Urdreieck zusammen, weil, wie bekannt, das Aggregat der Mittelsenkrechten, d. h. der aus dem Mittelpunkt des äussern Kreises auf die Dreiecksseiten gefällten Senkrechten, gleich der Summe der beiden genannten Halbmesser ist, oder weil

$$R\,(\cos A + \cos B + \cos C) = R + r \text{ ist.}$$

g. Eine solche Parallele, durch den Mittelpunkt des innern Kreises gezogen, hat eine Ternionlänge, welche das Dreifache vom Halbmesser des genannten Kreises bildet.

h. Dagegen ist der Radius eines äussern Berührungskreises eben so gross als die Ternionlänge der durch seinen Mittelpunkt mit den Entfernungsörtern parallel gezogenen Geraden.

i. Fragt man nach derjenigen Parallele, für welche die zugehörige Ternionlänge das arithmetische Mittel zwischen den drei Höhen des Dreiecks ist, so ist es keine andere als die, welche durch den Punkt der mittlern Entfernung oder den Schwerpunkt gezogen ist.

k. Die Ternionlänge einer solchen Parallele, welche durch einen der Berührungspunkte des innern Kreises gezogen ist, ist das arithmetische Mittel zwischen den Ternionlängen der beiden Entfernungsörter, zu denen die Seite, auf welcher der Berührungspunkt liegt, nicht gehört. (10)

l. Wenn man daher durch alle drei Berührungspunkte des innern Kreises Parallelen mit den Entfernungsörtern zieht, so sind die drei zu ihnen gehörigen Ternionlängen zusammeu so gsoss als die der drei Entfernungsörter selbst zusammen genommen.

m. Die mit einem Entfernungsort parallele Gerade, welche von diesem um die Länge der Excentricität entfernt ist, hat eine Ternionlänge, welche um die dritte Proportionale zum Radius des äussern Kreises und eben dieser Excentricität grösser oder kleiner ist als die Ternionlänge des in Rede stehenden Entfernungsortes selbst, je nachdem sie nach der Gegenecke der zum Orte gehörigen Seite hinwärts oder von ihr abwärts liegt.

n. Wenn der Abstand einer solchen Parallele von einem Entfernungsort dem Radius des äussern Kreises vom Urdreieck gleich ist, so ist die ihr zugehörige Ternionlänge um die Excentricität grösser oder kleiner als die des genannten Ortes selbst.

o. In welchem Abstande von einem Entfernungsort muss eine Gerade mit ihm parallel gezogen werden, damit zwischen ihrer Ternionlänge und der des Entfernungsortes ein bestimmter vorgeschriebener Unterschied Statt finde?

Nennt man den vorgeschriebenen Unterschied δ, so hat man

$$\pm \frac{e}{R} . d = \delta, \text{ also}$$

$$\pm d = \frac{R}{e} . \delta$$

p. Zur Bestimmung derjenigen Parallele, für welche das Aggregat der Entfernungen jedes Punktes von den Dreiecksseiten gleich Null ist, dient die Gleichung

$$\Sigma_{(c)}\, p - \frac{e}{R} d = o, \text{ woraus sich ergiebt}$$

$$d = \frac{R}{e} . \Sigma_{(c)}\, p$$

d. h. wenn man in einem Abstande von einem Entfernungsort gleich der vierten Proportionale zur Excentricität, dem Radius des äussern Kreises und der Ternionlänge dieses Ortes und zwar auf derjenigen Seite des letztern, auf welcher die Gegenecke seiner zugehörigen Seite nicht liegt, mit dem Orte eine Parallele zieht, so ist sie der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, für welche das Aggregat ihrer Entfernungen von den Seiten gleich Null ist.

q. Die Linie, welche man so erhält, ist keine andere, als diejenige, auf welcher die drei Durchschnittspunkte der äussern Winkelhalbierenden mit den Gegenseiten der ihnen angehörigen

Dreiecksspitzen liegen, und die wir schon früher (27_a) als eine den Entfernungsörtern parallele Gerade kennen gelernt haben. Denn jeder der drei genannten Durchschnittspunkte hat offenbar die verlangte Eigenschaft, da er auf der einen Dreiecksseite selbst liegt und die Entfernungen von den beiden andern gleich gross und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Daher müssen auch alle übrigen Punkte dieser Geraden dieselbe Eigenschaft haben.

r. Da es der Natur der Sache nach nur eine einzige Gerade geben kann, deren Punkte unserer in Rede stehenden bestimmten Forderung genügen, so folgt, dass, wenn d_1, d_2, d_3 die Entfernungen beziehungsweise des ersten (zur Seite a gehörigen), zweiten und dritten Entfernungsortes von unserer Parallele bezeichnen,

$$d_1 : d_2 : d_3 = \Sigma_{(a)}\ p : \Sigma_{(b)}\ p : \Sigma_{(c)}\ p$$

sein muss.

s. Da wir nun bereits wissen, dass immer, wenn a die grösste und c die kleinste Dreiecksseite ist,

$$\Sigma_{(a)}\ p < \Sigma_{(b)}\ p < \Sigma_{(c)}\ p,$$

so muss auch in diesem Falle stets

$$d_1 < d_2 < d_3$$

sein

d. h. der zur grössten Dreiecksseite gehörige Entfernungsort ist unserer Parallele am nächsten, der zur kleinsten gehörige von ihr am entferntesten.

t. Rückt eine den Entfernnngsörtern parallele Gerade noch über die bisher betrachtete, durch die äussern Winkelhalbierenden bestimmte Linie hinaus, so werden die Aggregate der Entfernungen ihrer einzelnen Punkte von den Dreiecksseiten, da nun offenbar

$$\Sigma_{(a)}\ p - \frac{e}{R} \cdot d < o$$

wird, subtractiv, d. h. es werden nun die an den äussern Kanten der Dreiecksseiten liegenden Senkrechten — ihrer absoluten Länge nach — zusammen grösser sein, als die Summe der an den innern Kanten liegenden.

u. Unsere mehr erwähnte Parallele bildet daher die Gränzlinie, durch welche die additiven Entfernungsaggregate getrennt werden von den subtractiven. Man wird sie daher nicht unpassend mit dem Namen der Gränzparallele bezeichnen.

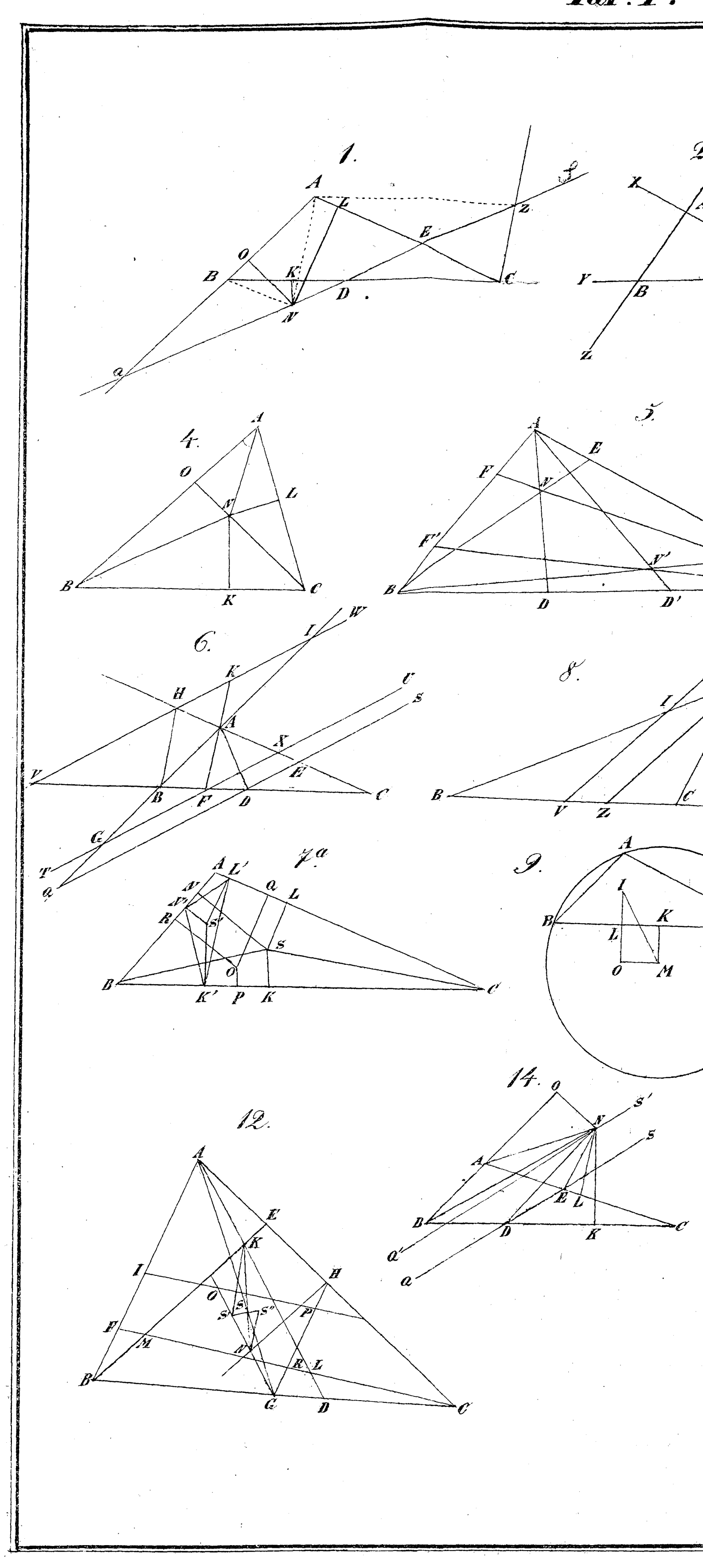
v. Zieht man zu beiden Seiten der Gränzparallele in gleichen Entfernungen von ihr, zwei andere ihr parallele Gerade, und construiert für jede eine Ternion von Senkrechten, so sind diese sechs Geraden immer so beschaffen, dass die Summe der auf den äussern Flanken der Dreiecksseiten liegenden so gross ist als die Summe der auf den innern Flanken liegenden.

71. Die sämmtlichen im vorigen Paragraph unter a bis v aufgeführten Beziehungen, mittelst welcher sich eine grosse Anzahl von Aufgaben lösen lassen, die ohne diese Hülfe mancherlei Schwierigkeiten darbieten würden, sind der Erweiterung fähig, dass man an die Stelle der nach den

Dreiecksseiten gezogenen Senkrechten solche Gerade setzen darf, welche diesen Seiten unter schiefen aber für alle drei Seiten einerlei Grösse habenden Winkeln begegnen. —

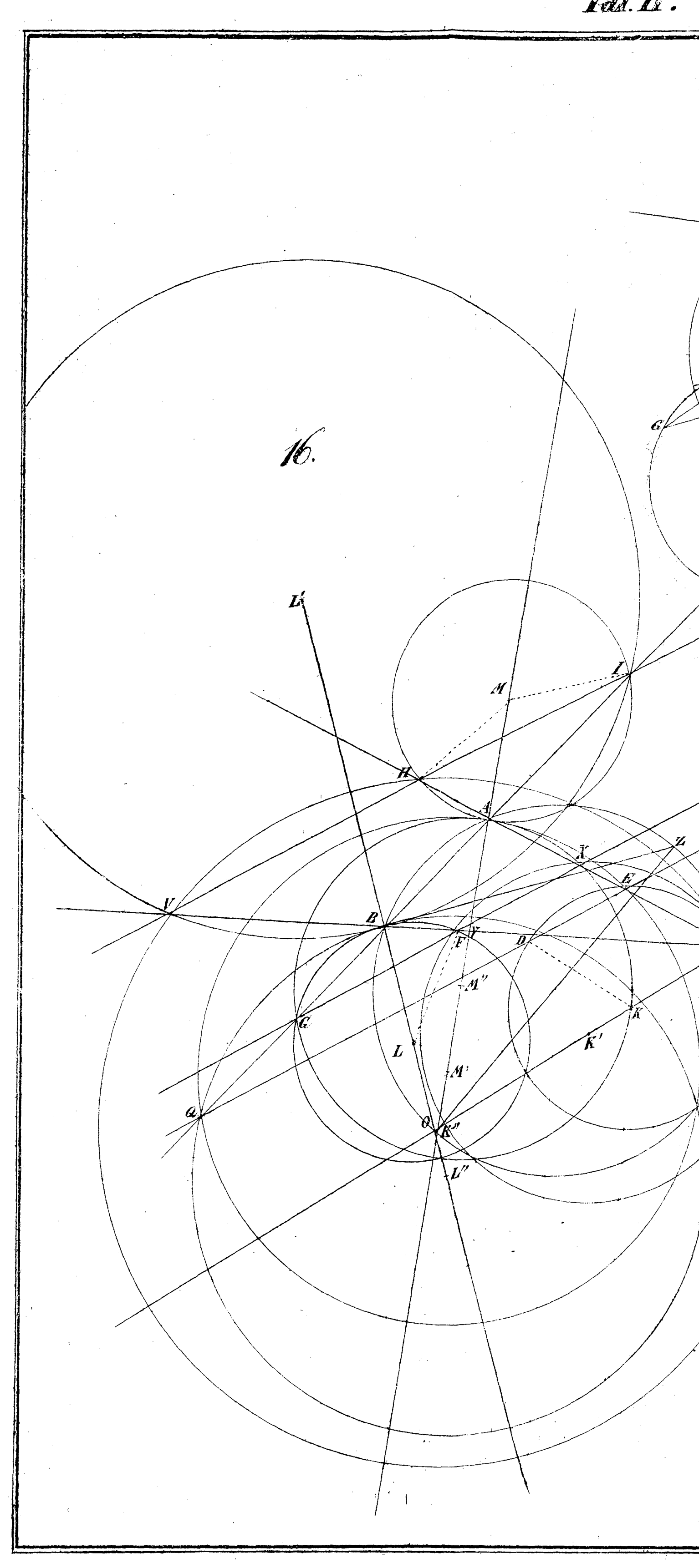
72. Die bisher entwickelten Sätze mögen zwar die wesentlichsten Eigenschaften unserer Entfernungsörter enthalten; allein zu einem vollen Abschluss, wie ich ihn ursprünglich beabsichtigte, ist der Gegenstand damit keineswegs gebracht. Denn es giebt noch eine andere Ternion von Entfernungsörtern, die dem Professor Timmermanns ganz entgangen zu sein scheinen, nnd die ich äussere, im Gegensatz der bisherigen als innerer, nennen möchte. Dieselben bieten sowohl unter sich als in Verbindung mit den innern eine beträchtliche Anzahl von Beziehungen dar, die gekannt zu werden verdienen. Ich werde daher die nächste sich mir darbietende Gelegenheit benutzen, um diesen zweiten Theil meiner Arbeit der Oeffentlichkeit zu übergeben. Zunächst aber empfehle ich den vorliegenden Theil der nachsichtigen Beurtheilung sachkundiger Leser.

Druck von H. Sieling in Naumburg.



Taf. I.
1.
2.
4.
5.
6.
8.
7.a
9.
12.
14.

Taf. II.



Die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke.

II. Die äussern Entfernungsörter.

Eine geometrische Abhandlung

von

Dr. Carl Friedr. Andr. Jacobi,
Professor in Pforta, Ritter des Rothen Adlerordens IV. Cl.

Jena,
bei Friedrich Frommann.

1854.

1. In der vor drei Jahren von mir herausgegebenen geometrischen Abhandlung über die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke konnte wegen der Gränzen, die ich in Beziehung auf den äussern Umfang meiner Arbeit einhalten musste, der Gegenstand nicht einmal für Dreiecke in der Hauptsache zum Abschluss gebracht werden. Daher schloss ich die kleine Schrift mit der Zusage, das noch Fehlende bei erster sich mir darbietender Gelegenheit nachfolgen zu lassen. Diese letztere finde ich in der diesjährigen Feier des Stiftungsfestes unserer Landesschule, und säume um so weniger, meinem Versprechen nachzukommen, als sachkundige Männer, so weit mir deren Urtheile bekannt geworden sind, sich beifällig über den ersten Theil meiner Arbeit ausgesprochen haben. Wenn in dem XVII. Bande des Archivs für Mathematik und Physik etc. der geehrte Herausgeber bei Gelegenheit der Anzeige meiner Schrift bemerkt, dass ihr Gegenstand einer allgemeineren Behandlung durch Hülfe der Coordinatenmethode fähig sei, so ist diese Bemerkung, wie auch durch das zur Begründung derselben Beigebrachte thatsächlich bewiesen wird, zwar vollkommen richtig, aber meine Abhandlung wird durch dieselbe nicht getroffen. Denn in der Einleitung zu derselben habe ich mich deutlich und ausführlich darüber ausgesprochen, dass es ein doppelter Zweck sei, den ich bei Abfassung der Schrift im Auge gehabt habe. Ich wollte nämlich nicht blos einer Anzahl nützlicher geometrischer Wahrheiten, die bisher noch zu wenig bekannt waren, eine allgemeinere Verbreitung geben, sondern zugleich auch, so weit es möglich, eine Art öffentlicher Rechenschaft über den mathematischen Unterricht bei hiesiger Landesschule ablegen. Und dieser letztere Zweck lag mir, wie ich gern öffentlich bekenne, mindestens eben so sehr am Herzen als jener erstere. Sollte derselbe aber nur einigermassen erreicht werden, so war es offenbar unerlässlich, dass ich mich bei Behandlung der genannten Wahrheiten in meiner Schrift genau derselben Entwickelungsweise bediente, welche früher von denjenigen gefordert worden war, denen diese Sätze zur schriftlichen Bearbeitung aufgegeben wurden. Denn nur so konnten sachkundige Leser in den Stand gesetzt werden, sich ein Urtheil über das Maass der Anforderungen zu bilden, welche an die Mitglieder der ersten Classe unserer Landesschule für die schriftlichen mathematischen Arbeiten gemacht werden. Aber so musste es sich auch, wie ich glaube, für jeden unbefangenen Leser klar und überzeugend herausstellen, dass weder in dem für solche Arbeiten gewählten Stoff noch in der zur Anwendung gebrachten Behandlungsweise desselben etwas liege, was zu der Besorgniss Anlass geben könnte,

als würden an unsere Primaner — Jünglinge von neunzehn bis zwanzig Jahren und zum Theil darüber — für deren allgemeine geistige Durchbildung bereits vielfach vorgearbeitet ist, unbillige Anforderungen gestellt.

2. Den in der vorhergenannten Abhandlung betrachteten Entfernungsörtern kann man den besondern Beinamen der innern geben, weil sie dadurch entstehen, dass man je eine Dreiecksseite auf den beiden andern nach innen zu abschneidet. Ihnen treten entgegen die äussern Oerter, welche man erhält, indem man, wie vorhin nach innen, jetzt eben so nach aussen d. h. je eine Dreiecksseite auf den über sie hinausgehenden Verlängerungen der beiden andern abschneidet, und je zwei solcher zusammengehöriger Durchschnittspunkte verbindet.

Diese äussern Entfernungsörter sind es, zu deren näherer Untersuchung wir uns jetzt wenden.

Anmerkung. Es bedarf wohl kaum noch besonders erinnert zu werden, dass bei diesen Untersuchungen alles das nur kurz berührt wird, was bei den innern Entfernungsörtern bereits ausreichend erörtert worden ist, während andererseits diese letztern Oerter überall da mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, wo ihr Zusammenhang mit den äussern es wünschenswerth macht.

3. Es ist aber zuvörderst leicht, sich zu überzeugen, dass den drei unbegränzten Geraden, welche man in der Ebene jedes Dreiecks auf die vorher angegebene Weise erhalten kann, mit Recht der Name von Entfernungsörtern zukomme.

Denn verlängert man in dem Dreieck ABC (Fig. 1) die Seiten CB und CA so, dass $BD = BA = AE$ ist, und nimmt auf der durch die Punkte D, E bestimmten Geraden einen beliebigen Punkt N, fällt von ihm auf die Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen Senkrechte NK, NL, NO so ist, wenn man den Inhalt des Vierecks ABD durch V bezeichnet,

$$NK \,.\, BD - NL \,.\, AE + NO \,.\, AB = 2V \quad \text{d. i.}$$
$$(NK - NL + NO)\, c = 2V, \quad \text{also}$$
$$NK - NL + NO = \frac{2V}{c} \quad (1)$$

Die Aggregatlänge unserer drei Senkrechten ist also, wie wir sehen, eine einfache Function von dem Inhalt des Vierecks ABDE und der Länge der abgeschnittenen Seite c. Da es nun aber augenfällig ist, dass durch ein Fortrücken des Punktes N auf der unbegränzten Geraden XZ weder der Inhalt des Vierecks ABDE noch die Länge der Seite c eine Veränderung erleidet, so bleibt, wie auch N seine Lage auf XZ ändern möge, das Aggregat der von ihm auf die Dreiecksseiten gefällten Senkrechten unverändert, da es in allen Fällen den sich gleichbleibenden Werth $\frac{2V}{c}$ behält.

Es besitzt demnach XZ die volle Eigenschaft eines Entfernungsortes.

Zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt man natürlich, wenn man mit den Seiten a und b eben so verfährt, wie hier mit c geschehen ist.

Anmerkung. Die drei äussern Entfernungsörter unterscheiden wir in ähnlicher Weise wie die innern nach den drei Dreiecksseiten und nennen jeden den zu derjenigen Seite zugehörigen, durch deren Abschneiden auf den Verlängerungen der beiden andern er erstanden ist.

4. Sind AQ und BR (Fig. 1) zwei innere Winkelhalbierende, so hat man, einem bekannten Elementarsatze zufolge,

$$AQ \parallel BE \text{ und } BR \parallel AD,$$

$$\text{also nicht nur } CE : CA = CB : CQ,$$
$$\text{sondern auch } CA : CR = CD : CB,$$
$$\text{darum auch } CE : CR = CD : CQ,$$
$$\text{also } QR \parallel XZ.$$

Da, wie leicht zu erachten, Aehnliches für die beiden andern Oerter sich nachweisen lässt, so sehen wir, dass die drei äussern Entfernungsörter eines Dreiecks einzeln parallel den Seiten desjenigen Dreiecks sind, welches die Fusspunkte der innern Winkelhalbierenden zu seinen Ecken hat.

Anmerkung 1. Die äussern Entfernungsörter können also niemals einander parallel sein, während die innern es stets sein müssen.

Anmerkung 2. Da wir den Parallelismus für die innern Oerter als eine Art unmittelbarer, d. h. aus der Natur dieser Linien gleichsam von selbst sich ergebender Nothwendigkeit in Anspruch genommen haben, so darf es für den ersten Augenblick billig befremden, dass die äussern Entfernungsörter nicht parallel sind, ohne jedoch in ihrem Grundwesen von den innern verschieden zu sein. Es ist jedenfalls der Mühe werth, in eine nähere Erörterung des Gegenstandes einzugehen, um diesen scheinbaren Widerspruch zu lösen.

Aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphs sehen wir, dass die Senkrechte NO, obschon sie an der äussern Flanke der Seite c liegt, dennoch in dem Aggregat, zu dem sie gehört, additiv erscheint und dass sie dieses Vorzeichen so lange behalten wird, als der Punkt N nicht über den Durchschnittspunkt des Entfernungsortes und der ihm zugehörigen Seite hinausrückt. Für einen äussern Entfernungsort wird also diejenige Flanke der zugehörigen Seite additiv, welche für den innern subtractiv war und umgekehrt; für die beiden nicht zugehörigen Seiten aber tritt eine solche Veränderung nicht ein. Es wird also bei diesen äussern Entfernungsörtern offenbar die Gleichmässigkeit aufgehoben, welche bei jedem innern Ort in Hinsicht auf die Bestimmung der additiven und subtractiven Flanken für alle drei Seiten Statt hatte. Mit dieser Gleichmässigkeit aber verschwindet auch der unmittelbare Grund für den Parallelismus der äussern Entfernungörter. Denn jetzt ist es gar wohl möglich, dass ein und derselbe Punkt in der Ebene eines Dreiecks zweien von dessen äussern Entfernungsörtern zugleich angehören, also dieselbe Ternion von Senkrechten zwei verschiedene Werthe haben kann, da man ja zwei dieser Senkrechten mit andern Vorzeichen nehmen muss, je nachdem man sie auf den einen oder den andern dieser Entfernungsörter bezieht.

Anmerkung 3. Hierbei bleibt freilich noch die Frage übrig, worinn wohl der Grund dafür gesucht werden müsse, dass bei einem Abschneiden nach aussen die Gleichmässigkeit in der Bestimmung der additiven und subtractiven Flanken für die Dreiecksseiten gestört wird?

Ein näheres Eingehen auf die hierbei maassgebenden Umstände führt zu der Ueberzeugung, dass diese Ungleichmässigkeit nur die natürliche Folge einer andern ist, derjenigen nämlich, die herbeigeführt wird, so oft ein Punkt, der bisher innerhalb eines Dreiecks lag, aus demselben herausrückt. Während er vorher gegen alle drei Dreiecksseiten einerlei Lage hatte — er lag für jede an der additiven Flanke — tritt nun jedenfalls eine Ungleichmässigkeit ein, indem er, wo er sich auch sonst in der Dreiecksebene befinden mag, gegen eine Seite eine andere Lage hat, als gegen die beiden andern; denn entweder befindet er sich an den additiven Flanken zweier Seiten und an der subtractiven der dritten, oder umgekehrt. Was aber von Punkten gilt, ist auch für bestimmte Strecken gerader Linien, die in der Ebene eines Dreiecks liegen, richtig, namentlich für diejenigen Strecken unserer äussern Entfernungsörter, die zwischen den beiden nicht zugehörigen Seiten enthalten sind. Jeder Punkt einer solchen Strecke liegt für die zugehörige Dreiecksseite — aber auch nur für sie — an der äussern Flanke; wenn nun diese jetzt die additive wird, so

geschieht gerade dadurch bei den äussern Oertern offenbar dasselbe, was auch bei den innern Statt findet, dass nämlich die additive Flanke jeder Seite, als Erzeugerin eines Entfernungsortes, nach der Richtung hin liegt, nach welcher sie selbst abgeschnitten werden musste, um den zugehörigen Ort zu erhalten.

Etwas ähnliches wie zwischen den äussern und innern Entfernungsörtern eines Dreiecks findet zwischen dessen äussern und innern Winkelhalbierenden Statt, und können daher die bekannten Eigenschaften dieser letztern zur Erläuterung und Bestätigung dessen dienen, was vorher gesagt wurde.

Wenn die innern Winkelhalbierenden immer und nothwendig einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben müssen, die äussern dagegen einen solchen niemals haben können, so liegt der Hauptgrund eben darin, dass stets je zwei der erstern sich innerhalb des Dreiecks — also in einem Punkte von einerlei Lage gegen alle drei Seiten — je zwei der letztern aber ausserhalb schneiden, also in einem Punkte, dem die genannte Eigenschaft nothwendig abgehen muss. Dass je zwei äussere und die nicht zugehörige d. h. durch die dritte Spitze des Dreiecks gehende innere Winkelhalbierende einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, wird im Wesentlichen dadurch herbeigeführt, dass es für je drei solche Linien Strecken giebt, die gegen die Dreiecksseiten einerlei Lage — an den innern Flanken zweier und an der äussern der dritten — haben.

5. Nachdem so der Unterschied zwischen innern und äussern Entfernungsörtern festgestellt worden ist, drängt sich unwillkührlich die Frage auf, wie es wohl dann sein werde, wenn man gleichsam einen Mittelzustand eintreten lasse, indem man eine Dreiecksseite auf einer der beiden übrigen nach innen, auf der andern nach aussen hin abschneidet? ob eine durch zwei solche Durchschnittspunkte bestimmte Gerade auch als ein Entfernungsort und zwar als ein solcher zu betrachten sei, der mit den bereits bekannten Entfernungsörtern in irgend näherer Beziehung stehe?

Um diese Fragen beantworten zu können ist es, wie leicht zu erachten, durchaus unerlässlich, die Lage der in Rede stehenden Geraden mit hinreichender Schärfe zu bestimmen. Versuchen wir daher diese Bestimmung.

Zu dem Ende sei (Fig. 2) $AE = AB = BD'$ und $AG = AC = CF'$ d. h. es sei das einemal c auf b nach innen und auf a nach aussen, das andere mal b auf c nach innen und auf a nach aussen abgeschnitten.

Von den beiden so erhaltenen Geraden $D'E$ und $F'G$ lässt sich nun zuvörderst erweisen, dass sie einander parallel sind. Denn wenn $EX \parallel AB$ und $CY \parallel F'G$, so ergeben sich nach bekannten Elementarsätzen leicht folgende Beziehungen:

$$EX = \frac{b-c}{b} . c\,,\ BX = \frac{c}{b} . a,\ \text{also}\ D'X = c + \frac{c}{b} . a = \frac{a+b}{b} . c$$

$$BZ = \frac{D'B}{D'X} . EX = \frac{b\,.\,c}{(a+b)\,c} . \frac{b-c}{b} . c = \frac{b-c}{a+b} . c$$

$$BY = \frac{BC}{BF'} . BG = \frac{b-c}{a+b} . a$$

Nun ist aber unbestritten

$$\frac{b-c}{a+b} . c : c = \frac{b-c}{a+b} . a : a$$

$$\text{also}\ BZ : BD' = BY : BC$$

$$\text{mithin}\ \triangle BD'Z \backsim \triangle BCY,\ \text{also}$$

$$D'E \parallel CY \parallel F'G.$$

Aber nicht blos unter einander sind die Geraden D'E und F'G parallel sondern zugleich auch dem äussern Entfernungsort der Seite a.

Dieser Ort ist, wie bereits (4) gezeigt worden, parallel der Geraden, welche die Fusspunkte der zu B und C gehörigen innern Winkelhalbierenden verbindet. Unsere Behauptung wird also richtig sein, wenn sich nachweisen lässt, dass D'E und F'G parallel dieser Verbindenden sind. Dies kann aber und zwar sehr leicht geschehen. Denn bezeichnen Q und R (Fig. 2) die genannten Fusspunkte, so ist, wie bekannt,

$$AQ = \frac{c}{a+c} . b, \ AR = \frac{b}{a+b} . c$$

Es ist ferner, weil, wie wir wissen,

$$BZ = \frac{b-c}{a+b} . c \text{ ist,}$$

$$AZ = c - \frac{b-c}{a+b} . c = \frac{a+c}{a+b} . c$$

Nun ist aber stets und nothwendig

$$\frac{c}{a+c} . b : \frac{b}{a+b} . c = c : \frac{a+c}{a+b} . c,$$

also auch

$$AQ : AR = AE : AZ$$

und mithin $D'E \parallel QR$, und demnach auch parallel dem äussern Entfernungsort der Seite a.

Ausser D'E und F'G giebt es natürlich noch zwei andere Linienpaare, von denen jedes einem der beiden übrigen äussern Entfernungsörter parallel ist. Dieselben werden bestimmt durch die Durchschnittspunkte, die man erhält, indem man entweder a auf c nach innen, auf b aber nach aussen und ausserdem c auf a nach innen, auf b aber nach aussen, oder dass man a auf b nach innen, auf c aber nach aussen, und zugleich b auf a nach innen, auf c aber nach aussen abschneidet.

Wir sehen also, dass die Antwort auf unsere Frage sich einfacher gestaltet, als anfänglich vermuthet werden mochte. Diejenigen sechs Geraden, die dadurch entstehen, dass man zur Hälfte nach innen zur Hälfte nach aussen abschneidet, sind paarweise den drei äussern Entfernungsörtern parallel und stehen daher in so enger Beziehung zu ihnen, dass sie als unmittelbar zu denselben gehörig betrachtet werden müssen.

Anmerkung 1. Während also die innern Entfernungsörter nur eine Ternion paralleler Linien bilden, umfassen die äussern drei solcher Ternionen.

Anmerkung 2. Die Ueberlegenheit der äussern Oerter über die innern, die hier in der Menge der erstern sich herausgestellt, tritt, wie wir später sehen werden, auch bei manchen Eigenschaften in sofern hervor, als Ein äusserer Ort allein so viel leistet, als die drei innern zusammen, oder doch überhaupt mehr als ein innerer.

Anmerkung 3. Ein wahrhaft überraschendes Uebergewicht der äussern Oerter über die innern tritt in dem Umstand hervor, dass solche Gerade wie D'E, F'G, welche dadurch entstehen, dass man halb nach innen und halb nach aussen hin abschneidet, in ihrer Lage nicht mit den innern, sondern mit den äussern Oertern übereinstimmen.

Mit Recht fragt man, woher ein solches Uebergewicht, das, so zu sagen, auf eine völlige Kraft- und Machtlosigkeit des Abschneidens nach innen dem Abschneiden nach aussen gegenüber hinzuweisen scheint? Hierauf lässt sich antworten: Ein völliges Aufgehen des Abschneidens nach innen in dem Abschneiden nach aussen, wie sehr

auch im ersten Augenblick der Schein dafür sprechen mag, findet doch bei näherer Untersuchung aller Umstände in der That nicht Statt, wie es denn auch, wenn es wirklich Statt hätte, nicht leicht in völlig genügender Weise sich erklären lassen würde. Vielmehr werden wir später (7) bei der Entwickelung der Werthausdrücke für die Ternionlängen der einzelnen Entfernungsörter Gelegenheit haben, zu bemerken, wie bei diesen Ausdrücken das theilweise Abschneiden nach innen sein Recht geltend macht.

Anmerkung 4. Wenn man gleichwohl im Allgemeinen und Ganzen eine Ueberlegenheit der äussern Oerter über die innern einräumen muss, so scheint damit ein Umstand bei gleichseitigen Dreiecken im Widerspruche zu stehen. Während nämlich hier die innern Oerter kekanntermassen die ganze Dreiecksebene beherrschen d. h. während jeder Punkt dieser Ebene als ein Punkt eines innern Entfernungsortes angesehen werden kann, so ist dies bei den aussern Oertern nicht der Fall; denn die Nebenörter (Anmerk. 5) fallen mit den verlängerten Dreiecksseiten zusammen und die Hauptörter bilden drei diesen Seiten parallele Gerade. Es sind also offenbar die äussern Oerter auf ein engeres Gebiet angewiesen als die innern. Allein anstatt eines Widerspruchs wird ein sorgfältigeres Nachdenken hierinn nothwendigen Zusammenhang entdecken. Denn je inhaltsvoller die Beziehungen sind, in welche ein Punkt oder eine Gerade zu einem gegebenen Raumgebilde treten soll, desto weniger kann natürlich die Lage dieses Punktes oder dieser Geraden gegen das Gebilde gleichgültig sein; vielmehr muss dieselbe eine desto gewähltere und mithin auf ein desto engeres Gebiet beschränkte sein, je zahlreicheren Anforderungen zugleich genügt werden und je grösser gleichsam die Herrschaft ist, die von diesem Punkte oder dieser Linie aus auf das gegebene Gebilde ausgeübt werden soll.

Sind z. B. in einer Ebene drei nicht parallele Gerade gegeben, und es wird ein Kreis verlangt, der eine derselben berühre, so ist jeder Punkt der ganzen Ebene geeignet, Mittelpunkt dieses Kreises zu werden; sollen aber irgend zwei der Geraden berührt werden, so sind nur solche Punkte zulässig, welche auf sechs bestimmten Geraden dieser Ebene liegen; wird endlich verlangt, dass der gesuchte Kreis sogar alle drei Gerade berühre, so giebt es in der gesammten Ebene nur wenige Punkte, von denen aus als Mittelpunkten er sich beschreiben lässt.

Wenden wir das eben Gesagte auf unsere Entfernungsörter an, so sehen wir, wie gerade in der Ueberlegenheit der äussern Oerter über die innern der Grund für das engere Gebiet liegt, auf das sie im Vergleich zu den innern Oertern in der Dreiecksebene beschränkt sind.

Man kann aber die Sache auch noch von einem andern Gesichtspunkte aus betrachten und sich deutlich machen. Man kann sagen: gerade darum, weil jeder Punkt in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks ein Punkt der innern Entfernungsörter sein muss, darf man sich nicht wundern, wenn er nicht zugleich auch ein Punkt der äussern Oerter sein kann; es ist vielmehr ganz naturgemäss, dass diejenigen Punkte, welche ausser jener ersten auch noch diese zweite Eigenschaft besitzen sollen, einer besondern Lage gegen das Dreieck bedürfen.

Anmerkung 5. Der nöthigen Kürze halber wollen wir die drei zu jeder Dreiecksseiten gehörigen äussern Oerter durch die Beinamen des ersten, zweiten und dritten von einander unterscheiden und zwar dergestalt, dass das zweimalige Abschneiden der Seite a nach aussen hin, den ersten äussern Ort eben dieser Seite giebt, der zweite oder dritte aber gewonnen wird, je nachdem man die erste Nachfolgerin von a also b, oder die zweite c auf der Verlängerung von a abschneidet. Entsprechende Bestimmungen gelten für den ersten, zweiten und dritten Entfernungsort sowohl der Seite b als c.

Zuweilen werden wir auch den zweiten und dritten äussern Ort einer Seite mit dem gemeinschaftlichen Namen äusserer Nebenörter belegen im Gegensatz zum ersten, der alsdann Hauptort heisst.

Anmerkung 6. Die Nebenörter gehören, insofern man ihre Lage als das Hauptmoment für ihre nähere Bestimmung betrachtet nicht zu den Seiten, durch deren Abschneiden sie entstanden sind; denn von den beiden Nebenörtern der Seite a entsteht der eine durch das Abschneiden von b, der andern durch das von c.

6. Ist XDEZ (Fig. 1) der zur Seite c gehörige äussere Hauptort und behält V die ihm schon früher beigelegte Bedeutung, so ist

$$\begin{aligned}2V &= 2 \triangle CDE - 2 \triangle ABC \\ &= CD \,.\, CE \,.\, \sin C - a \,.\, b \sin C \\ &= (a + c)\,(b + c) \sin C - ab \sin C \\ &= (a + b + c)\, c \sin C, \quad \text{also}\end{aligned}$$

$$NK - NL + NO = \frac{2V}{c} = (a + b + c) \sin C$$

Anmerkung. Es braucht kaum erinnert zu werden, dass man für die äussern Hauptörter der Seiten a und b als Werthausdrücke der einzelnen Ternionen von Senkrechten erhält $(a + b + c) \sin A$ und $(a + b + c) \sin B$.

7. Suchen wir die entsprechenden Beziehungen für die Nebenörter.

Zu dem Ende sei N (Fig. 2) ein beliebiger Punkt auf dem zweiten der drei zur Seite a gehörigen äussern Entfernungsörter; NK, NL, NO seien senkrecht auf den einzelnen Dreiecksseiten; V, bezeiche den Inhalt des Vierecks AGF′C; alsdann ist

$$(NK + NL - NO)\, b = 2V, \quad \text{also}$$

$$NK + NL - NO = \frac{2V}{b}$$

Es ist aber auch

$$2V = 2 \triangle ABC + 2 \triangle BF'G$$

$$= a\, c \sin B + (a + b)(b - c) \sin B$$

$$\frac{2V}{b} = (a + b - c) \sin B, \quad \text{also auch}$$

$$NK + NL - NO = (a + b - c) \sin B$$

Durch eine ganz ähnliche Entwickelung findet man als Werthausdruck für die einzelnen Ternionlängen der Senkrechten, die von Punkten des dritten zur Seite a gehörigen äussern Ortes aus gefällt werden

$$(a - b + c) \sin C.$$

Die drei zu einerlei Dreicksseite gehörigen äussern Oerter geben also, wie wir sehen, Ausdrücke, die darinn übereinstimmen, dass in jedem der Sinus vom Gegenwinkel der abgeschnittenen Seite erscheint, die aber darinn von einander verschieden sind, dass, während für den Hauptort alle drei Dreiecksseiten additiv erscheinen, für die beiden Nebenörter eine subtractiv ist, und zwar diejenige, auf welcher man nach innen hin abgeschnitten hat.

Stellen wir der bessern Uebersicht halber alle neun Ausdrücke zusammen, so haben wir für den

	ersten	zweiten	dritten äussern Ort
1. der Seite a	$(a + b + c) \sin A$,	$(a + b - c) \sin B$,	$(a - b + c) \sin C$
2. der Seite b	$(a + b + c) \sin B$,	$(- a + b + c) \sin C$,	$(a + b - c) \sin A$
3. der Seite c	$(a + b + c) \sin C$,	$(a - b + c) \sin A$,	$(- a + b + c) \sin B$
Und dazu kommen	$(- a + b + c) \sin A$,	$(a - b + c) \sin B$,	$(a + b - c) \sin C$

als die bereits bekannten Ausdrücke für die innern Oerter der Seiten a, b, c.

Anmerkung. Die Uebereinstimmung, welche sich hier zwischen den Nebenörtern und den innern darinn herausstellt, dass eine der Dreiecksseiten subtractiv erscheint, und die ohne Zweifel ihren Grund in der Art und Weise hat, wie diese Oerter gewonnen werden, ist darum bemerkenswerth, weil in diesen Werthausdrücken die Entstehung der Nebenörter sich viel entschiedener geltend macht, als man bei ihrer Lage, nach welcher sie zu den

äussern Oertern gezählt werden mussten, hätte erwarten sollen. Man könnte auch sagen, dass durch die Entschiedenheit, mit der sich in den Werthausdrücken für die Ternionlängen der Nebenörter das Abschneiden nach innen geltend macht, das Gleichgewicht zwischen innen und aussen wieder hergestellt werde, was man vermmisst, so lange man blos die Lage dieser Oerter ins Auge fasst.

8. Bezeichnet man der nöthigen Kürze halber durch $\Sigma^{(a)} p$ die Länge einer Ternion von Senkrechten des zur Seite a gehörigen ersten äussern Entfernungsortes, haben ${}^{(a)}\Sigma p$ und ${}_{(a)}\Sigma p$ dieselbe Bedeutung beziehungsweise für den zweiten und dritten äussern Ort eben dieser Seite, bedient man sich ganz analoger Bezeichnungen für die äussern Oerter der Seiten b und c und behält endlich für $\Sigma_{(a)} p$, $\Sigma_{(b)} p$ und $\Sigma_{(c)} p$ die diesen Zeichen in Beziehung auf die innern Entfernungsörter bereits früher beigelegte Bedeutung bei, so ergiebt sich zunächst aus (6) unmittelbar

$$\Sigma^{(a)} p : \Sigma^{(b)} p : \Sigma^{(c)} p = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

d. h. die Ternionlängen der Senkrechten die man von den drei äussern Hauptörtern eines Dreiecks auf dessen Seiten fällt, verhalten sich wie die zu diesen Oertern zugehörigen Dreiecksseiten.

Anmerkung. Bei den Hauptörtern gilt also für die Ternionlängen der Senkrechten dasselbe, was bei den innern Oertern für die zwischen je zwei nicht zugehörigen Seiten enthaltenen Strecken der Oerter selbst Statt findet.

Zus. 1. Daher ist das Dreieck, welches die genannten Ternionlängen zu seinen Seiten hat, dem Urdreieck ähnlich.

Zus. 2. In jedem ungleichseitigen Dreieck sind die Ternionlängen der drei Hauptörter verschieden und zwar ist diejenige die grösste, welche zu dem Ort der grössten Seite gehört.

Zus. 3. Eben so wenig als bei den innern Entfernungsörtern kann bei den Hauptörtern eine Ternionlänge so gross sein als die beiden andern zusammen.

Zus. 4. Dagegen kann es wohl geschehen, dass die eine Ternionlänge das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern wird. Es findet diese Beziehung, wie leicht zu sehen, in jedem nach den Seiten halb regelmässigen Dreieck Statt.

Zus. 5. In gleichseitigen Dreiecken ist die Ternionlänge jedes Hauptortes dreimal so gross als die sowohl jedes innern als jedes Nebenortes.

Zus. 6. In rechtwinkeligen Dreiecken ist die Summe der Quadrate der Ternionlängen der Catheten so gross als das Quadrat von der Ternionlänge der Hypotenuse.

9. Wenn T den Inhalt des vorher (8, Zus. 1.) genannten Dreiecks bezeichnet, und $\triangle$ und R ihre übliche Bedeutung behalten, so ist:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{a+b+c}{c} \cdot \sin C\right)^2 \cdot \triangle \\ &= \left(\frac{a+b+c}{2R}\right)^2 \triangle \\ &= (\sin A + \sin B + \sin C)^2 \triangle \\ &= 16 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \triangle \end{aligned}$$

Zus. 1. Aus dem, was früher für die innern Entfernungsörter nachgewiesen worden, folgt unmittelbar, dass

$$\Sigma_{(a)}\, p \,.\, \Sigma_{(b)}\, p \,.\, \Sigma_{(c)}\, p = 64 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \,.\, r^3$$

also auch

$$= 4\, r^3 \,.\, \frac{T}{\triangle}$$

$$= \frac{r}{2\triangle} \,.\, 8\, r^2\, T$$

$$= \frac{8\, r^2\, T}{a + b + c}$$

$$= \frac{16 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} \,.\, r\, T$$

$$= 4 \,\mathrm{tg} \frac{A}{2} \,\mathrm{tg} \frac{B}{2} \,\mathrm{tg} \frac{C}{2} \,.\, r \,.\, T$$

Zus. 2. Da nun auch, wie bekannt, in jedem Dreieck

$$r = \mathrm{tg} \frac{A}{2} \,\mathrm{tg} \frac{B}{2} \,\mathrm{tg} \frac{C}{2} \,.\, \frac{a + b + c}{2}$$

ist, so ist auch

$$\Sigma_{(a)}\, p \,.\, \Sigma_{(b)}\, p \,.\, \Sigma_{(c)}\, p = 2 \,\mathrm{tg}^2 \frac{A}{2} \,\mathrm{tg}^2 \frac{B}{2} \,\mathrm{tg}^2 \frac{C}{2} \,.\, (a + b + c) \,.\, T$$

Zus. 3. Bezeichnet $\mathfrak{D}$ den Inhalt des Dreiecks, welches aus den zwischen zwei nicht zugehörigen Seiten enthaltenen Segmenten der innern Entfernungsörter construiert ist, so wissen wir bereits, dass

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{e}{R}\right)^2 \,.\, \triangle;$$

hieraus aber und aus unserm Hauptsatz folgt leicht, dass

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{2e}{a + b + c}\right)^2 \,.\, T$$

ist.

10. Es sei R' der Radius vom äussern Kreise des Dreiecks T; wegen der Aehnlichkeit von T mit dem Urdreieck und der in (9) nachgewiesenen Beziehung ist

$$R' : R = a + b + c : 2\,R, \text{ also}$$

$$R' = \frac{a + b + c}{2}$$

d. h. der Radius vom äussern Kreise des Dreiecks, welches zu seinen Seiten die Ternionlängen der drei Hauptörter eines gegebenen Dreiecks hat, ist halb so gross als der Umfang dieses letztern.

11. Construiert man die Höhen des Dreiecks T und bezeichnet mit $\Sigma h'$ die Summe ihrer obern Abschnitte, so ist, bekannten Beziehungen zufolge,

$$\begin{aligned}\Sigma h' &= 2R' (\cos A + \cos B + \cos C)\\ &= (a + b + c) (\cos A + \cos B + \cos C)\\ &= a + b + c + a \cos A + b \cos B + c \,.\, \cos C\end{aligned}$$

Der Umfang eines Dreiecks also, welches man aus den obern Abschnitten der Höhen des Dreiecks T construiert, ist so gross als die Umfänge des Urdreiecks und seines Höhenfusspunktdreiecks zusammen genommen.

12. Bezeichnet $\mathfrak{r}$ den Radius des innern Kreises vom Dreieck T, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{r} &= \frac{2T}{(a + b + c)(\sin A + \sin B + \sin C)}\\ &= \frac{2\left(\frac{a + b + c}{2R}\right)^2}{(a + b + c)(\sin A + \sin B + \sin C)} \,.\, \triangle\\ &= \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)^2 \,.\, R} \,.\, \triangle = \frac{\triangle}{R}\end{aligned}$$

also $$R \,.\, \mathfrak{r} = \triangle$$

d. h. das Rechteck aus den Radien vom äussern Kreise des Urdreiecks und vom innern des Dreiecks T *ist so gross als das Urdreieck.*

Zus. 1. Da, wie bekannt,

$$\triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

so ergiebt sich hieraus in Verbindung mit unserm so eben bewiesenen Satz sofort

$$\mathfrak{r} = 2R \sin A \sin B \sin C$$

Zus. 2. Da nach einer bekannten Beziehung (A. S. 723, Zus. 2)

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

so ist $$\mathfrak{r} = \frac{R}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

Zus. 3. Es ist aber (A. S. 792)

$$R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

der Werthausdruck für den Umfang des Fusspunktdreiecks; wir gewinnen also damit den Lehrsatz:

Der Radius vom innern Kreise des Dreiecks T *ist halb so gross als der Umfang vom Fusspunktdreieck des Urdreiecks.*

Zus. 4. Ist also das Urdreieck und somit auch T rechtwinkelig, so ist der Radius vom innern Kreise des letztern so gross als die zur Hypotenuse gehörige Höhe des ersten.

13. Es seien $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'''$ die Radien der drei äussern Berührungskreise des Dreiecks T und zwar $\mathfrak{r}'$ zu dem Kreise gehörig, welcher die Gegenseite des mit A gleichen Winkels von aussen berührt etc. Nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke ist nun:

$$\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' + \mathfrak{r}''' = \mathfrak{r} + 4\,\mathbf{R}'$$

$$= \frac{\triangle}{\mathbf{R}} + 2\,(a + b + c)$$

$$\mathbf{R}\,(\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' + \mathfrak{r}''') = \triangle + 2\,\mathbf{R}\,(a + b + c)$$

In der Untersuchung über die innern Entfernungsörter (47, Zus. 2) ist nun nachgewiesen, dass das dort mit dem Namen Mittelpunktsdreieck bezeichnete Dreieck — es möge τ heissen — viermal so klein ist als das Rechteck aus dem Radius des äussern Kreises und dem Umfang des Urdreiecks, wir erhalten demnach

$$\mathbf{R}\,(\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' + \mathfrak{r}''') = \triangle + 8\,\tau$$

d. h. das Rechteck aus dem Radius des äussern Kreises vom Urdreieck und aus der Summe der Radien der drei äussern Berührungskreise des Dreiecks T ist um den Flächenraum des Urdreiecks grösser als das achtfache des Dreiecks, das zu seinen Ecken die Mittelpunkte der drei gleichen Kreise hat, die sich um die von den einzelnen innern Oertern und den nicht zugehörigen Seiten gebildeten Dreiecke beschreiben lassen.

Wenn nach üblicher Weise δ den Inhalt des Dreiecks bezeichnet, das zu seinen Ecken die Berührungspunkte des innern Kreises vom Urdreieck hat, so ist bekanntermassen

$$\frac{\delta}{\triangle} = \frac{r}{2\,\mathbf{R}};$$

da nun, wie wir bereits (12) wissen,

$$\triangle = \mathbf{R}\,.\,\mathfrak{r}, \text{ so ergiebt sich}$$

$$2\,\delta = r\,.\,\mathfrak{r}$$

d. h. das Rechteck aus den Radien der innern Kreise des Urdreiecks und des Dreiecks T ist doppelt so gross, als das durch die Berührungspunkte des erstern bestimmte Dreieck.

Sind δ', δ'', δ''' für den ersten, zweiten und dritten äussern Berührungskreis dasselbe, was δ für den innern ist, so ergiebt sich in gleich einfacher Weise wie vorher, dass

$$2\,\delta' = r'\,.\,\mathfrak{r},\quad 2\,\delta'' = r''\,.\,\mathfrak{r},\quad 2\,\delta''' = r'''\,.\,\mathfrak{r}$$

Es ist also auch jedes der äussern Berührungsdreiecke halb so gross als das Rechteck aus den Radien des zugehörigen äussern Berührungskreises vom Urdreieck und des innern Berührungskreises vom Dreieck.

15. Da einem bekannten Elementarsatz zufolge jeder äussere Berührungskreis die beiden nicht zugehörigen d. h. nicht an den äussern Flanken berührten Seiten in Punkten trifft, die von dem gemeinsamen Endpunkte eben dieser Seiten um den halben Umfang des Dreiecks entfernt sind, so folgt hieraus in Verbindung mit unserem früheren Satz (6), dass ein solcher Punkt der einen Seite von der andern um die Hälfte einer Ternionlänge des zur dritten Seite gehörigen Hauptortes entfernt ist.

Anmerkung. Man kann also die Ternionlängen der Hauptörter in ähnlicher Weise zur Darstellung bringen wie die der innern Oerter.

16. Die beiden innern Winkelhalbierenden eines Dreiecks, welche zu den an der Seite eines Hauptortes anliegenden Winkeln gehören, stehen zu diesem Ort in ähnlicher Beziehung wie die äussern Winkelhalbierenden zu den innern Oertern. Von den Senkrechten, die man von einem der Durchschnittspunkte des Ortes mit den Winkelhalbierenden auf die Dreiecksseiten fällt, sind zwei von gleicher Länge und entgegengesetzten Vorzeichen, daher wird die ganze Ternionlänge des Ortes durch die dritte Senkrechte allein dargestellt.

Wir gelangen so zu dem Lehrsatz:

Die Durchschnittspunkte eines Hauptortes mit den beiden innern Winkelhalbierenden, welche zu den an der Seite des Ortes anliegenden Winkeln gehören, sind einzeln von den Gegenseiten der halbierten Winkel gleichweit entfernt und zwar um die Ternionlänge des Hauptortes.

17. Es ist, wie man ohne Schwierigkeit sieht, wenn h', h'', h''' ihre frühere Bedeutung behalten und die zu den Seiten a, b, c gehörigen Höhen bezeichnen:

$$\Sigma^{(a)} p + \Sigma_{(a)} p = 2 (b + c) \sin A = 2 (h'' + h''')$$

d. h. Construiert man für eine Dreiecksseite sowohl den äussern Hauptort als auch den innern Entfernungsort, so sind die Ternionlängen dieser Oerter zusammen noch einmal so gross als die Summe der zu den beiden andern Dreiecksseiten gehörigen Höhen.

Zus. 1. Ist das in Rede stehende Dreieck in A rechtwinkelig, und die Hypotenuse diejenige Seite, für welche die beiden Entfernungsörter construiert sind, so ergiebt sich, wegen der bekannten Beziehungen, denen zufolge $2R = a$ und $2r = b + c - a$ (r Radius des innern Kreises), folgender

Lehrsatz: In jedem rechtwinkeligen Dreieck sind die Ternionlängen des äussern Hauptortes und des innern Ortes der Hypotenuse zusammen doppelt so gross als die Summe der Durchmesser vom äussern und innern Kreis des Dreiecks.

Zus. 2. Aus unserem Hauptsatze in Verbindung mit (15) ergiebt sich leicht folgender

Lehrsatz: Construiert man sowohl den innern als auch einen der äussern Berührungskreise eines Dreiecks und fällt für jeden derselben von dem Berührungspunkte mit einer der beiden Dreiecksseiten, zu denen der äussere Kreis nicht gehört, auf die andere Senkrechte, so ist die Summe dieser beiden Geraden so gross als die Summe der zu eben jenen beiden Seiten gehörigen Höhen.

18. Durch Anwendung unseres soeben (17) gewonnenen Lehrsatzes auf alle drei Seiten des Dreiecks erhalten wir

$$\Sigma^{(a)} p + \Sigma^{(b)} p + \Sigma^{(c)} p + \Sigma_{(a)} p + \Sigma_{(b)} p + \Sigma_{(c)} p = 4 (h' + h'' + h''')$$

d. h. die Ternionlängen der drei äussern Hauptörter und der drei innern Entfernungsörter zusammen sind so gross als die vierfache Summe der Dreieckshöhen.

Zus. 1. Für gleichseitige Dreiecke insbesondere ist

$$\Sigma^{(a)} p = \Sigma^{(b)} p = \Sigma^{(c)} p = 3 h \text{ und } \Sigma_{(a)} p = \Sigma_{(b)} p = \Sigma_{(c)} c = h$$

Zus. 2. Wenn man sowohl die drei äussern Berührungskreise eines Dreiecks als auch den innern construiert, und in jedem der erstern von dem Berührungspunkte mit einer der nicht zugehörigen Seiten auf die andere Senkrechte fällt, für den innern Kreis aber gleichmässig drei Senkrechte von dem Berührungspunkt der ersten Seite auf die zweite von dem der zweiten auf die dritte und von dem dritten auf die erste Seite, so ist die Summe dieser so erhaltenen sechs Senkrechten noch einmal so gross als die Höhensumme des Dreiecks.

19. Fragt man nach dem Ueberschuss, welchen die drei Ternionlängen der äussern Hauptörter über die drei innern Oerter haben, so hat man

$$\begin{aligned}\Sigma^{(a)} p + \Sigma^{(b)} p + \Sigma^{(c)} p - \Sigma_{(a)} p - \Sigma_{(b)} p - \Sigma_{(c)} p &= 2 (a \sin A + b \sin B + \sin C) \\ &= 4R (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &= 4R (3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)\end{aligned}$$

und weil, wenn ϱ den Radius vom innern Kreise des Höhenfusspunktdreiecks bezeichnet, stets

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{\varrho}{R} \text{ (A. S. 797)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\Sigma^{(a)} p + \Sigma^{(b)} p + \Sigma^{(c)} p - \Sigma_{(a)} p - \Sigma_{(b)} p - \Sigma_{(c)} p &= 4R \left(3 - \frac{R - \varrho}{R}\right) \\ &= 4 (2R + \varrho)\end{aligned}$$

d. h. dieser vorhergenannte Ueberschuss ist viermal so gross als der um den Radius des innern Kreises vom Höhenfusspunktdreieck vermehrte Durchmesser vom äussern Kreise des Urdreiecks.

20. Ist N (Fig. 3) der Durchschnittspunkt der beiden zu den Seiten b und c gehörigen Hauptörter F'G' und D'E' und man fällt von ihm aus auf die Dreiecksseiten die Senkrechten NK, NL, NO, so ist

$$NK + NL - NO = \Sigma^{(b)}\,p$$

und

$$NK - NL + NO = \Sigma^{(c)}\,p$$

also

$$NK = \frac{\Sigma^{(b)}\,p + \Sigma^{(c)}\,p}{2}$$

d. h. die Entfernung des Durchschnitts zweier Hauptörter von der nicht zugehörigen Seite ist das arithmetische Mittel zwischen den beiden Ternionlängen dieser Oerter.

Zus. Daher sind die Entfernungen der Durchschnittspunkte je zweier Hauptörter von den nicht zugehörigen Seiten zusammen so gross als die Summe der Ternionlängen dieser Oerter.

21. Ist der Punkt Q (Fig. 3) der Durchschnitt des Hauptortes und des innern Ortes der Seite c und QR, QS, QT senkrecht auf den Seiten a, b, c, so hat man

$$-QR + QS + QT = \Sigma^{(c)}\,p$$

und

$$-QR + QS - QT = \Sigma_{(c)}\,p$$

also

$$QS - QR = \frac{\Sigma^{(c)}\,p + \Sigma_{(c)}\,p}{2} = h' + h'' \quad (17)$$

d. h. der Punkt, in welchem sich der äussere Hauptort und der innere Entfernungsort einer Dreiecksseite schneiden, hat eine solche Lage, dass das Aggregat seiner Entfernungen von den beiden nicht zugehörigen Seiten so gross ist als die Summe der zu eben diesen Seiten gehörigen Höhen.

Anmerkung 1. Da der Natur der Sache nach einen solchen Durchschnittspunkt man nie anders erhält als dadurch, dass man jeden der beiden Oerter über einen der beiden ihn bestimmenden Punkte hinaus verlängert, so liegt dieser Durchschnitt nothwendig und immer an der äussern Flanke einer der nicht zugehörigen Seiten. Das Aggregat seiner Entfernungen von den letztern ist also in allen Fällen ein Unterschied. Man könnte daher unsern Lehrsatz auch folgendermassen aussprechen: Von den vier in Rede stehenden Senkrechten ist die eine so gross als die drei andern zusammen.

Anmerkung 2. Was bei ungleichseitigen Dreiecken für einen einzigen Punkt eines Hauptortes — für seinen Durchschnitt mit dem innern Ort derselben Dreiecksseite — richtig ist, muss bei gleichseitigen Dreiecken für alle Punkte desselben gelten, da ja den zugehörigen innern Entfernungsort die ganze Dreiecksebene bildet, also jeder Punkt eines äussern Hauptortes zugleich auch als Punkt eines innern Ortes oder, was dasselbe ist, als ein Durchschnitt zweier solcher Oerter angesehen werden kann.

22. Neue Beziehungen ergeben sich, wenn man auch die Nebenörter (7) in den Kreis der Betrachtung zieht.

Aus den früher (7) für die Ternionlängen dieser Oerter entwickelten Werthausdrücken ergiebt sich unmittelbar und ohne alle Schwierigkeit

$$\Sigma^{(a)}\,p = \Sigma_{(a)}\,p + {}^{(c)}\Sigma\,p + {}_{(b)}\Sigma\,p$$
$$\Sigma^{(b)}\,p = \Sigma_{(b)}\,p + {}^{(a)}\Sigma\,p + {}_{(c)}\Sigma\,p$$
$$\Sigma^{(c)}\,p = \Sigma_{(c)}\,p + {}^{(b)}\Sigma\,p + {}_{(a)}\Sigma\,p$$

d. h. construiert man für eine der Seiten eines Dreiecks den innern, für ihre Vorgängerinn den zweiten äussern und für ihre Nachfolgerin den dritten äussern Entfernungsort, so sind die Ternionlängen dieser drei Oerter zusammen so gross als die Ternionlänge des Hauptortes der zuerst genannten Seite.

Anmerkung 1. Die Seite a hat zur Nachfolgerin b, zur Vorgängerin c etc.; die drei Seiten eines Dreiecks ABC in geordneter Folge bilden daher eine der drei Folgen a, b, c, oder b, c, a, oder c a, b.

Anmerkung 2. Wir haben hier einen von den Fällen, deren bereits früher (5, Anm. 2) gedacht worden.

23. Mit gleicher Leichtigkeit wie vorher ergiebt sich ferner aus (7):

$$\Sigma_{(a)} p : {}_{(c)}\Sigma p : {}^{(b)}\Sigma p = a : b : c$$
$$\Sigma_{(b)} p : {}_{(a)}\Sigma p : {}^{(c)}\Sigma p = b : c : a$$
$$\Sigma_{(c)} p : {}_{(b)}\Sigma p : {}^{(a)}\Sigma p = c : a : b$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks, in geordneter Folge (22, Anm. 1) genommen, haben dasselbe Verkältniss zu einander wie die Ternionlängen vom innern Entfernungsort der ersten vom dritten äussern Ort der dritten und vom zweiten äussern der zweiten.

24. Daher ist auch

$$\Sigma^{(a)} p : \Sigma^{(b)} p : \Sigma^{(c)} p = \Sigma_{(a)} p : {}_{(c)}\Sigma p : {}^{(b)}\Sigma p = {}^{(c)}\Sigma p : \Sigma_{(b)} p : {}_{(a)}\Sigma p = {}_{(b)}\Sigma p : {}^{(a)}\Sigma p : \Sigma_{(c)} p$$

25. Es ist auch, wie leicht zu sehen,

$$\Sigma^{(a)} p \,.\, {}^{(a)}\Sigma p = \Sigma^{(b)} p \,.\, {}_{(b)}\Sigma p$$
$$\Sigma^{(b)} p \,.\, {}^{(b)}\Sigma p = \Sigma^{(c)} p \,.\, {}_{(c)}\Sigma p$$
$$\Sigma^{(c)} p \,.\, {}^{(c)}\Sigma p = \Sigma^{(a)} p \,.\, {}_{(a)}\Sigma p$$

d. h. das Rechteck aus den Ternionlängen des ersten und zweiten äussern Ortes einer Dreiecksseite ist gleich dem Rechteck aus den Ternionlängen des ersten und dritten dieser Oerter für die nächst folgende Seite.

26. Die Dreiecke, welche man aus den Seitenlängen

$$\Sigma_{(a)} p \,,\; {}_{(c)}\Sigma p \,,\; {}^{(b)}\Sigma p$$
$$\text{oder } \Sigma_{(b)} p \,,\; {}_{(a)}\Sigma p \,,\; {}^{(c)}\Sigma p$$
$$\text{oder } \Sigma_{(c)} p \,,\; {}_{(b)}\Sigma p \,,\; {}^{(a)}\Sigma p$$

construiert, sind nicht nur unter sich sondern auch dem Urdreieck und dem Dreieck T ähnlich. Diese Dreiecke mögen, in derselben Reihenfolge genommen, in welcher vorstehend ihre Seitenlängen aufgeführt sind, T′, T″, T‴ heissen. Wegen ihrer Aehnlichkeit mit dem Urdreieck hat man

$$T' = \left(\frac{-a+b+c}{a} \cdot \sin A\right)^2 \cdot \triangle$$

$$= \left(\frac{-a+b+c}{2R}\right)^2 \cdot \triangle$$

$$= (-\sin A + \sin B + \sin C)^2 \cdot \triangle$$

$$= 16 \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \triangle$$

und natürlich in entsprechender Weise:

$$T'' = 16 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \triangle$$

$$T''' = 16 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \triangle$$

Zus. Es ist also:

$$T' : T'' : T''' = \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2} : \operatorname{cotg}^2 \frac{B}{2} : \operatorname{cotg}^2 \frac{C}{2} .$$

29. Bezeichnet man die Radien der äussern Kreise unserer Dreiecke beziehungsweise durch R′, R″, R‴, so lässt sich auf dieselbe einfache Weise wie früher (10) zeigen, dass

$$2R' = -a + b + c, \quad 2R'' = a - b + c, \quad 2R''' = a + b - c$$

28. Die Radien der Kreise um die Dreiecke T′, T″, T‴ sind also zusammen so gross als der Radius des Kreises um T.

Zus. 1. Daher ist auch jede Seite des letztern Dreiecks allein so gross wie die entsprechenden Seiten der drei erstern zusammen, so wie überhaupt jede bestimmte Linie in diesem Dreieck so gross ist wie die entsprechenden Linien der drei übrigen Dreiecke zusammen.

Zus. 2. Bezeichnen daher m, n, p die Radien der innern Kreise unserer drei in Rede stehenden Dreiecke, während r seine frühere Bedeutung (12) behält, so ist

$$r = m + n + p, \quad \text{und weil, wie wir wissen}$$

$$\triangle = R \cdot r, \quad \text{so ist auch}$$

$$\triangle = R\,(m + n + p)$$

d. h. das Rechteck aus dem Radius des äussern Kreises vom Urdreieck und aus der Summe der innern Radien der Dreiecke T′, T″, T‴ ist dem Urdreieck gleichflächig.

29. Es ist nun insbesondere

$$m = \frac{2T'}{(-a+b+c)(\sin A + \sin B + \sin C)}$$
$$= \frac{-a+b+c}{(a+b+c).R} \cdot \triangle$$
$$= \frac{-a+b+c}{2R} \cdot r,$$

also

$$2R \,.\, m = (-a+b+c)\,r, \quad \text{und dem entsprechend}$$
$$2R \,.\, n = (a-b+c)\,r$$
$$2R \,.\, p = (a+b-c)\,r$$

d. h. die Rechtecke aus dem Durchmesser des äussern Kreises vom Urdreieck und aus einem der Radien der innern Kreise der Dreiecke T′, T″, T‴ sind einzeln den drei Vierecken gleich, in welche das Urdreieck durch diejenigen drei Radien seines innern Kreises zerlegt wird, welche man nach den Berührungspunkten zieht.

30. Weil

$$\Sigma_{(a)} p \,.\, {}^{(a)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(a)}\Sigma\, p = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\sin A \sin B \sin C$$
$$= \Sigma_{(b)} p \,.\, {}^{(b)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(b)}\Sigma\, p$$
$$= \Sigma_{(c)} p \,.\, {}^{(c)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(c)}\Sigma\, p$$

so sind die senkrechten Parallelepipeda aus den Ternionlängen von je einem innern Orte und den beiden zu eben dieser Seite gehörigen Nebenörtern von gleichem Inhalt.

31. Aber es giebt noch drei andere senkrechte Parallelepipeda, welche unsern so eben betrachteten und darum auch untereinander inhaltsgleich sind; denn es ist:

$$\Sigma_{(a)} p \,.\, \Sigma_{(b)} p \,.\, \Sigma_{(c)} p = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\sin A \,.\, \sin B \sin C$$
$$= {}^{(a)}\Sigma\, p \,.\, {}^{(b)}\Sigma\, p \,.\, {}^{(c)}\Sigma\, p$$
$$= {}_{(a)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(b)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(c)}\Sigma\, p$$

Die innern Entfernungsörter und die äussern Nebenörter stehen also in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass die sechs senkrechten Parallelepipeda, die sich bilden lassen aus den Ternionlängen entweder je dreier zu einerlei Seite gehöriger Oerter oder der gleichnamigen Oerter verschiedener Seiten, alle untereinander inhaltsgleich sind.

32. Da offenbar

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}$$

$$= \frac{16\triangle^2}{a+b+c}$$

$$= \frac{2\triangle}{a+b+c} \,.\, 8\triangle = 8\,\mathfrak{r}\,\triangle$$

$$= 2R \,.\, 2r \,.\, 2\mathfrak{r} \quad (12)$$

so erhalten wir den

Lehrsatz: Nimmt man in einem Dreick den Ueberschuss der Summe je zweier Seiten über die dritte, so ist das durch diese drei Linien bestimmte senkrechte Parallelepipedon inhaltsgleich mit demjenigen, welches bestimmt wird durch die Durchmesser vom äussern und innern Kreis des Urdreiecks und vom innern Kreis des Dreiecks T.

33. Aus den beiden unmittelbar vorhergehenden Lehrsätzen ergiebt sich ohne alle Schwierigkeit:

$$\Sigma_{(a)}\, p \,.\, \Sigma_{(b)}\, p \,.\, \Sigma_{(c)}\, p = 2R \,.\, 2r \,.\, 2\mathfrak{r} \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$$

$$= 4r \,.\, \mathfrak{r}^2 \quad (12, \text{Zus. } 1)$$

d. h. jedes der vorher (31) betrachteten Parallelepipeda ist auch inhaltsgleich mit demjenigen, welches das Quadrat vom Durchmesser des innern Kreises des Dreiecks T zur Grundfläche und den Radius vom innern Kreis des Urdreiecks zur Höhe hat.

34. Weil nothwendig und immer

$$(a+b+c)\big[(-a+b+c)(a-b+c)+(-a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(a+b-c)\big] =$$
$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 8\,abc$$

ist, so ist auch

$$\Sigma^{(a)}\, p \,.\, {}^{(a)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(a)}\Sigma\, p + \Sigma^{(b)}\, p \,.\, {}^{(b)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(b)}\Sigma\, p + \Sigma^{(c)}\, p \,.\, {}^{(c)}\Sigma\, p \,.\, {}_{(c)}\Sigma\, p$$

$$= \big[(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 8\,abc\big] \sin A \sin B \sin C$$

$$= \big[8\,r\,\triangle + 32\,R\,\triangle\big] \sin A \sin B \sin C \quad (34)$$

$$= 8\,(r + 4R)\,\triangle \sin A \sin B \sin C$$

$$= (r' + r'' + r''')\; 4\,\mathfrak{r}^2$$

d. h. die Summe der senkrechten Parallelepipeda aus je drei solchen Ternionlängen, die zu den drei äussern Oertern einer und derselben Dreiecksseite gehören, ist so gross als das Parallelepipedon, welches das Quadrat vom Durchmesser des innern Kreises des Dreiecks T zur Grundfläche und die Summe der Radien der drei äussern Berührungskreise vom Urdreieck zur Höhe hat

35. Die äussern Entfernungsörter stimmen mit den innern darinn überein, dass, um constante Ternionlängen für denselben Ort zu erhalten, die einzelnen Linien nicht nothwendig senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen müssen, sondern dass es ausreicht, wenn die Winkel zwischen diesen Linien und den Dreiecksseiten überhaupt von einerlei Grösse sind. Denn bezeichnet man eine Ternion solcher Linien, die unter Winkeln von der Grösse φ nach den Dreiecksseiten gezogen sind, durch Σ l, φ, so folgt aus den einfachsten Begriffsbestimmungen der Goniometrie, dass

$$\Sigma^{(a)}\ l,\ \varphi = \frac{\Sigma^{(a)}\ p}{\sin\ \varphi} = \text{cosec}\ \varphi\ .\ \Sigma^{(a)}\ p$$

sein muss; ist also $\Sigma^{(a)}$ p von constantem Werthe, so muss es natürlich auch cosec φ . $\Sigma^{(a)}$ p sein; d. h. es gilt von den Geraden, welche zwar nicht unter rechten, aber doch unter gleichen Winkeln von einem Entfernungsort nach den Dreiecksseiten gezogen werden, dasselbe, was wir von den Senkrechten hinsichtlich der Unveränderlichkeit des Werthes der Ternionen nachgewiesen haben.

Anmerkung. Wenn Linien von einem Entfernungsorte aus nach den Dreiecksseiten unter Winkeln gezogen werden von der Grösse desjenigen Dreieckswinkels, dessen Sinus mit einem Aggregat der Dreiecksseiten multiplicirt werden muss, um den Werth für jede Ternion von Senkrechten darzustellen, die man von diesem Orte nach den Dreiecksseiten zieht, — also bei innern Oertern und äussern Hauptörtern unter Winkeln gleich dem Gegenwinkel der zugehörigen Seite; bei den zweiten und dritten äussern Oertern unter Winkeln von der Grösse des Gegenwinkels derjenigen Seite, welche der zum Ort gehörigen beziehungsweise folgt oder vorausgeht — so soll der nöthigen Kürze halber dies fortan so ausgedrückt werden, das wir sagen, diese Linien seien von dem Orte aus unter entsprechenden Winkeln gezogen.

36. Aus unserm früheren Satze (6) ergiebt sich nun sofort:

$$\Sigma^{(a)}\ l,\ A = \Sigma^{(b)}\ l,\ B = \Sigma^{(c)}\ l,\ C = a + b + c$$

d. h. zieht man von einem der drei äussern Hauptörter nach den Dreiecksseiten Linien unter entsprechenden d. h. unter Winkeln von der Grösse des Gegenwinkels der zugehörigen Seite, so sind die Ternionlängen solcher Linien nicht nur für einen und denselben Hauptort, sondern für alle drei von einerlei Grösse und zwar so gross als des Dreiecks Umfang.

37. Eine nicht minder einfache Folge aus (6) ist die, nach welcher

$$\Sigma_{(a)}\ l,\ A = {}^{(b)}\Sigma\ l,\ C = {}_{(c)}\Sigma\ l,\ B$$

$$\Sigma_{(b)}\ l,\ B = {}^{(c)}\Sigma\ l,\ A = {}_{(a)}\Sigma\ l,\ C$$

$$\Sigma_{(c)}\ l,\ C = {}^{(a)}\Sigma\ l,\ B = {}_{(b)}\Sigma\ l,\ A$$

d. h. construiert man bei einer geordneten Folge der Seiten eines Dreiecks für die erste den innern Entfernungsort, für die zweite den zweiten äussern und für die dritte den dritten, so sind die Ternionen der von diesen Oertern nach den Dreiecksseiten unter entsprechenden Winkeln

gezogenen Linien für alle drei von einerlei Grösse, und zwar so gross als der Ueberschuss der beiden zu den äussern Oertern gehörigen Seiten über die dritte.

38. Aus der Verbindung der beiden vorhergehenden Sätze ergiebt sich:

$$\Sigma^{(a)}\, l, A = \Sigma^{(b)}\, l, B = \Sigma^{(c)}\, l, C = \Sigma_{(a)}\, l, A + \Sigma_{(b)}\, l, B + \Sigma_{(c)}\, l, C$$
$$= {}^{(a)}\Sigma\, l, B + {}^{(b)}\Sigma\, l, C + {}^{(c)}\Sigma\, l, A$$
$$= {}_{(a)}\Sigma\, l, C + {}_{(b)}\Sigma\, l, A + {}_{(c)}\Sigma\, l, B$$

d. h. zieht man von allen Entfernungsörtern eines Dreiecks nach dessen Seiten Gerade unter entsprechenden Winkeln, so ist jede einzelne Ternionlänge eines der drei Hauptörter allein so gross als von den übrigen je drei solche zusammen, welche zu gleichnamigen Oertern aller drei Seiten gehören.

Anmerkung. Es zeigt sich hier wiederum einer von den Fällen, auf welche früher (5, Anm. 2) hingewiesen worden ist.

39. Einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke zufolge ist

$$(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c) = 16\triangle^2 = 2r\,.\,2r'\,.\,2r''\,.\,2r''' ;$$

darum ist auch

$$\Sigma^{(a)}\, l, A\,.\,\Sigma_{(a)}\, l, A\,.\,{}^{(a)}\Sigma\, l, B\,.\,{}_{(a)}\Sigma\, l, C = \Sigma^{(b)}\, l, B\,.\,\Sigma_{(b)}\, l, B\,.\,{}^{(b)}\Sigma\, l, C\,.\,{}_{(b)}\Sigma\, l, A$$
$$= \Sigma^{(c)}\,.\, l, C\,.\,\Sigma_{(c)}\,.\, l, C\,.\,{}^{(c)}\Sigma\,.\, l, A\,.\,{}_{(c)}\Sigma\, l, B$$
$$= 16\triangle^2 = 2r\,.\,2r'\,.\,2r''\,.\,2r'''$$

d. h. zieht man von allen vier zu einerlei Dreiecksseite gehörigen Entfernungsörtern nach den Seiten Gerade unter entsprechenden Winkeln, bildet aus zwei dieser Ternionlängen ein Rechteck und eben so aus den beiden andern, so ist der vierfache Inhalt des Urdreiecks die mittlere Proportionalfläche zwischen diesen beiden Rechtecken; zugleich verhält sich das eine dieser Rechtecke zu dem aus zweien von den vier Durchmessern der Berührungskreise wie das aus den beiden andern dieser Durchmesser zum zweiten der in Rede stehenden Rechtecke.

40. Weil stets

$$a\,(-a + b + c) + b\,(a - b + c) + c\,(a + b - c) = (-a + b + c)\,(a - b + c)$$
$$+ (-a + b + c)\,(a + b - c) + (a - b + c)\,(a + b - c)$$

so ist auch

$$a\,\Sigma_{(a)}\,.\, l, A\,. + b\,.\,\Sigma_{(b)}\,.\, l, B + c\,.\,\Sigma_{(c)}\, l, C$$
$$= \Sigma_{(a)}\, l, A\,.\,\Sigma_{(b)}\,.\, l, B + \Sigma_{(a)}\, l, A\,.\,\Sigma_{(c)}\, l, C + \Sigma_{(b)}\, l, B\,.\,\Sigma_{(c)}\, l, C$$
$$= {}^{(a)}\Sigma\, l, B\,.\,{}^{(b)}\Sigma\,.\, l, C + {}^{(a)}\Sigma\, l, B\,.\,{}^{(c)}\Sigma\, l, A + {}^{(b)}\Sigma\, l, C\,.\,{}^{(c)}\Sigma\, l, A$$
$$= {}_{(a)}\Sigma\, l, C\,.\,{}_{(b)}\Sigma\, l, A + {}_{(a)}\Sigma\, l, C\,.\,{}_{(c)}\Sigma\, B + {}_{(b)}\Sigma\, l, A\,.\,{}_{(c)}\Sigma\, l, B$$

d. h. zieht man sowohl von den innern Oertern als von den Nebenörtern nach den Dreiecksseiten Linien unter entsprechenden Winkeln, so ist die Summe der Rechtecke aus je einer Ternionlänge der innern Oerter und der zugehörigen Dreiecksseite so gross als die Summe der drei Rechtecke, welche man aus den Ternionlängen je zweier der drei gleichnamigen Oerter von einer der drei genannten Classen bildet.

Anmerkung. Eben so wie aus den Ternionlängen der innern Oerter und den zugehörigen Seiten hätte man, ohne Werthveränderung ihrer Summe, die Rechtecke bilden können aus den einzelnen Ternionlängen der Nebenörter und den Dreiecksseiten, nur hätte man bei den zweiten äussern Oertern anstatt der zugehörigen Seite ihre Vorgängerinn, und bei den dritten die Nachfolgerinn nehmen müssen.

41. Wie bekannt, ist in jedem Dreieck

$$(a + b + c)^2 = 2r' \,.\, 2r'' + 2r' \,.\, 2r''' + 2r'' \,.\, 2r''',$$

darum auch

$$\Sigma^{(a)}\, l, A \,.\, \Sigma^{(b)}\, l, B = \Sigma^{(a)}\, l, A \,.\, \Sigma^{(c)}\, l, B = \Sigma^{(b)}\, l, B\, \Sigma^{(c)}\, l, C = 2r' . 2r'' + 2r' . 2r''' + 2r'' . 2r'''$$

d. h. zieht man von den drei Hauptörtern eines Dreiecks nach dessen Seiten Linien unter entsprechenden Winkeln, so ist jedes der Rechtecke aus je zwei dieser Ternionlängen so gross als die Summe der Rechtecke aus je zwei Durchmessern der drei äussern Berührungskreise.

42. In jedem Dreieck findet auch die Beziehung Statt, der zufolge

$$r\,(r' \,.\, r'' + r' \,.\, r''' + r'' \,.\, r''') = r' \,.\, r'' \,.\, r''' = \tfrac{1}{2}\,(a + b + c)\,\triangle$$

ist; darum muss auch stets

$$2r \,.\, \Sigma^{(a)}\, l,\, A \,.\, \Sigma^{(b)}\, l,\, B = 2r' \,.\, 2r'' \,.\, 2r''' = 4\,(a + b + c)\,\triangle$$

sein;

d. h. das senkrechte Parallelepipedon aus den Ternionlängen zweier Hauptörter, von denen die Linien nach den Dreiecksseiten unter entsprechenden Winkeln gezogen sind, und aus dem Durchmesser der innern Berührungskreise ist inhaltsgleich mit demjenigen, was die Durchmesser der drei äussern Berührungskreise zu seinen bestimmenden Dimensionen hat, und ausserdem auch vier mal so gross als das Prisma, dessen Grundfläche das Urdreieck und dessen Höhe der Umfang desselben ist.

43. Es ist nothwendig und immer

$$(a + b + c)^2 + (-a + b + c)\,(a - b + c) + (-a + b + c)\,(a + b - c) + (a - b + c)\,(a + b - c) = 4\,(ab + ac + bc)$$

und mithin auch

$$\left(\Sigma^{(a)}\, l, A \,.\right)^2 + \Sigma_{(a)}\, l, A \,.\, {}^{(a)}\Sigma\, l, B + \Sigma_{(a)}\, l, A \,.\, {}_{(a)}\Sigma\, l, C + {}^{(a)}\Sigma\, l, B \,.\, {}_{(a)}\Sigma\, l, C = 4(ab + ac + bc)$$

d. h. zieht man von allen vier Entfernungsörtern einer und derselben Dreiecksseite nach diesen Seiten Linien unter entsprechenden Winkeln, so ist das Quadrat der Ternionlänge des Hauptortes

vermehrt um die Summe der Rechtecke aus je zwei Ternionlängen der drei übrigen Oerter vier mal so gross als die Summe der Rechtecke aus je zwei Seiten des Urdreiecks.

Zus. Nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke ist die Summe unseres Quadrates und der drei Rechtecke, wie wir sie so eben näher bezeichnet haben, so gross als die Summe der sechs Rechtecke, welche sich aus den Durchmessern je zweier der vier Berührungskreise des Dreiecks bilden lassen.

44. Durch einfache Ausführung der angedeuteten Rechnungen überzeugt man sich, dass

$$a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+c(a+b-c)^2+(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=4\,abc$$

sein muss; demnach ist auch für jedes Dreieck:

$$a.\left(\Sigma_{(a)}\,l,A\right)^2+b.\left(\Sigma_{(b)}\,l,B\right)^2+c.\left(\Sigma_{(c)}\,l,C\right)^2+\Sigma_{(a)}\,l,A.\Sigma_{(b)}\,l,B.\Sigma_{(c)}.\,l,C=4\,abc$$

d. h. zieht man von den innern Entfernungsörtern nach den Dreiecksseiten Linien unter entsprechenden Winkeln, so ist die Summe der drei senkrechten Parallelepipeda, von denen jedes das Quadrat einer Ternionlänge zur Grundfläche und die dem Orte zugehörige Seite zur Höhe hat, vermehrt um das aus diesen drei Ternionlängen selbst gebildete Parallelepipedon vier mal so gross als dasjenige, welches durch die drei Seiten des Dreiecks bestimmt wird.

45. Wir wollen nun unser näheres Augenmerk auf die Lage der Oerter gegen die Dreiecksseiten richten und insbesondere auf die Lage derjenigen Punkte, in welchen die Oerter von den zu ihnen gehörigen Seiten geschnitten werden.

Um aber sowohl die Untersuchung selbst als auch deren Ergebnisse übersichtlicher zu machen, sollen diese sämmtlichen Durchschnittspunkte durch die Buchstaben K, L, M dergestalt bezeichnet werden, dass K, K′, K″, K‴ die Durchschnittspunkte der Seite a beziehlich mit dem innern Entfernungsort, mit dem ersten äussern, mit dem zweiten, mit dem dritten darstellen und dass L, L′, L″, L‴ und M, M′, M″, M‴ ganz ähnliche Bedeutung für die Seiten b und c haben. Es möge hier noch ausdrücklich bemerkt werden, dass wir uns fortan der feststehenden Bezeichnung bedienen, der zufolge (Fig. 4) D, E die bestimmenden Punkte des innern Ortes der Seite c, dagegen D′, E′ eben diese Punkte für ihren ersten äussern Ort bedeuten, und dass F, G und F′, G′ eben diese Bedeutung für die Seite b, sowie H, I und H′, I′ für a haben. Hieraus ergeben sich von selber F′ und G als die bestimmenden Punkte des zweiten und D′, E als die des dritten äussern Ortes von a. Dieselbe Bedeutung, wie F′ G und D′ E für a, haben D, E′ und H′ I für b, so wie H, I′ und F, G′ für c.

Nach einem bekannten Elementarsatz ergiebt sich nun für Dreieck ABC und seine Transversale MDE

$$AM\,.\,BD\,.\,CE=BM\,.\,CD\,.\,AE,$$

also auch $(c+BM)\,(b-c)=BM\,.\,(a-c)$

und darum $(b-c)\,c=BM\,(a-b),$

daher $$BM = \frac{b-c}{a-b}\,c$$

und $$AM = \left(\frac{b-c}{a-b} + 1\right) c = \frac{a-c}{a-b}\,c$$

Betrachtet und behandelt man auf eben die Weise, wie es hier für MDE geschehen ist, der Reihe nach alle Entfernungsörter als Transversalen des Urdreiecks, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$CK = \frac{a-c}{b-c} \,.\, a,\quad AL = \frac{a-b}{a-c} \,.\, b,\quad BM = \frac{b-c}{a-b} \,.\, c$$

$$BK = \frac{a-b}{b-c} \,.\, a,\quad CL = \frac{b-c}{a-c} \,.\, b,\quad AM = \frac{a-c}{a-b} \,.\, c$$

$$CK' = \frac{a+c}{b-c} \,.\, a,\quad AL' = \frac{a+b}{a-c} \,.\, b,\quad BM' = \frac{b+c}{a-b} \,.\, c$$

$$BK' = \frac{a+b}{b-c} \,.\, a,\quad CL' = \frac{b+c}{a-c} \,.\, b,\quad AM' = \frac{a+c}{a-b} \,.\, c$$

$$CK'' = \frac{a+c}{b+c} \,.\, a,\quad AL'' = \frac{a+b}{a+c} \,.\, b,\quad BM'' = \frac{b+c}{a+b} \,.\, c$$

$$BK'' = \frac{a-b}{b+c} \,.\, a,\quad CL'' = \frac{b-c}{a+c} \,.\, b,\quad AM'' = \frac{a-c}{a+b} \,.\, c$$

$$CK''' = \frac{a-c}{b+c} \,.\, a,\quad AL''' = \frac{a-b}{a+c} \,.\, b,\quad BM''' = \frac{b-c}{a+b} \,.\, c$$

$$BK''' = \frac{a+b}{b+c} \,.\, a,\quad CL''' = \frac{b+c}{a+c} \,.\, b,\quad AM''' = \frac{a+c}{a+b} \,.\, c$$

46. Hieraus ergiebt sich nun ohne alle Schwierigkeit:

a. $CK \,.\, CL = CK' \,.\, CL'' = CK'' \,.\, CL''' = CK''' \,.\, CL' = ab$

$AL \,.\, AM = AL' \,.\, AM'' = AL'' \,.\, AM''' = AL''' \,.\, AM' = bc$

$BM \,.\, BK = BM' \,.\, BK'' = BM'' \,.\, BK''' = BM''' \,.\, BK' = ca$

d. h. nimmt man ein Paar Dreiecksseiten in geordneter Folge und für sie entweder ihre innern Oerter oder eines der drei Paare, die sich in geordneter Folge aus den äussern Oertern bilden lassen, so dass der frühere dieser beiden Oerter zur frühern, der spätere zur spätern Seite gehört, so sind die Rechtecke aus den Segmenten, welche durch diese Oerterpaare auf den zugehörigen Seiten, von deren gemeinsamen Endpunkt aus gerechnet, abgeschnitten werden, dem Rechteck aus den Seiten selbst und darum auch alle vier unter einander gleich.

Daher ist

b. $AK \parallel BL$, $AK' \parallel BL''$, $AK'' \parallel BL'''$, $AK''' \parallel BL'$
$BL \parallel CM$, $BL' \parallel CM''$, $BL'' \parallel CM'''$, $BL''' \parallel CM'$
$CM \parallel AK$, $CM' \parallel AK''$, $CM'' \parallel AK'''$, $CM''' \parallel AK'$

d. h. *wenn man die Punkte, in denen die zu einem der vorhergenannten vier Paare gehörigen Oerter ihre zugehörigen Seiten schneiden, mit den Gegenecken dieser letztern verbindet, so sind diese beiden Geraden einander parallel.*

c. Hieraus folgt nun weiter:

$$AK \parallel BL \parallel CM$$
$$AK' \parallel BL'' \parallel CM'''$$
$$AK'' \parallel BL''' \parallel CM'$$
$$AK''' \parallel BL' \parallel CM''$$

d. h. verbindet man die Punkte, in denen die innern Entfernungsörter ihre zugehörigen Seiten schneiden, mit den Gegenecken dieser letztern, so erhält man eine Ternion paralleler Geraden. Eine eben solche Ternion erhält man auch stets dann, wenn man anstatt der innern Oerter die äussern in einer ihrer geordneten Folgen mit einer der geordneten Folgen der Seiten geordnet d. h. so verbindet, dass der erste Ort zur ersten Seite, der zweite zur zweiten, der dritte zur dritten gehört.

Anmerkung. Auch hier findet einer von den Fällen Statt, auf die wir früher (5, Anm. 2) hingewiesen haben.

d. Aus unsern Gleichungen in (a) ergiebt sich ferner:

$KL' \parallel K'''L$, $LM' \parallel L'''M$, $MK' \parallel M'''K$
$KL'' \parallel K'L$, $LM'' \parallel L'M$, $MK'' \parallel M'K$
$KL''' \parallel K''L$, $LM''' \parallel L''M$, $MK''' \parallel M''K$

d. h. verbindet man den Durchschnittspunkt einer Dreiecksseite und ihres innern Ortes der Reihe nach mit den Punkten, in welchen die nächstfolgende Seite von ihrem ersten, zweiten, dritten äussern Ort geschnitten wird, und verfährt alsdann eben so in Beziehung auf den innern Ort der zweiten Seite und die drei äussern der ersten, so sind die erste, zweite und dritte Verbindende der ersten Ternion parallel beziehlich der dritten, ersten und zweiten Verbindenden der andern Ternion.

e. Endlich folgt noch aus (a)

$K'L' \parallel K'''L''$, $L'M' \parallel L'''M''$, $M'K' \parallel M'''K''$
$K''L'' \parallel K'L'''$, $L''M'' \parallel L'M'''$, $M''K'' \parallel M'K'''$
$K'''L''' \parallel K''L'$, $L'''M''' \parallel L''M'$, $M'''K''' \parallel M''K'$

d. h. die Gerade, welche bestimmt wird durch zwei Punkte, in denen zwei Dreiecksseiten geschnitten werden durch zwei zu ihnen gehörige gleichnamige äussere Oerter ist parallel der durch die beiden Punkte bestimmten Geraden, in denen die frühere der beiden in Rede stehenden Seiten von ihrem den beiden gleichnamigen vorausgehenden äussern Entfernungsort, die spätere von dem auf diese folgenden geschnitten wird.

47. Nach den in (45) aufgestellten Werthausdrücken für die Segmente, in welche die Dreiecksseiten durch ihre Entfernungsörter getheilt werden, ist

$$\text{a.}\quad CK' \,.\, AL' \,.\, BM' = BK' \,.\, CL' \,.\, AM'$$

d. h. durch ihre Hauptörter werden die Dreiecksseiten so getheilt, dass die senkrechten Parallelepipeda aus je drei nicht an einander angränzenden Segmenten unter sich gleich sind.

b. Da nun die Natur der Hauptörter es nothwendig mit sich bringt, dass die Punkte K', L', M' sämmtlich auf die Verlängerungen ihrer Seiten fallen, so müssen einem bekannten Elementarsatz zufolge

die Punkte, in welchen die Dreiecksseiten von ihren Hauptörtern geschnitten werden, in gerader Linie liegen.

c. Auf ähnliche Weise ist:

$$AM \,.\, BK''' \,.\, CL'' = BM \,.\, CK''' \,.\, AL''$$
$$AM'' \,.\, BK \,.\, CL''' = AL''' \,.\, BM'' \,.\, CK$$
$$AM''' \,.\, BK'' \,.\, CL = AL \,.\, BM''' \,.\, CK''$$

d. h. die Segmente, in welche von den Dreiecksseiten, in einer ihrer geordneten Folgen (5, Anm. 2) genommen, die erste durch ihren zweiten äussern Entfernungsort, die zweite durch ihren innern und die dritte durch ihren dritten äussern getheilt wird, sind immer von der Beschaffenheit, dass die senkrechten Parallelepipeda aus je drei nicht an einander anliegenden gleich sind.

d. Weil die drei in c näher bezeichneten Ternionen von Punkten in der Eigenschaft übereinstimmen, dass für jede eine ungerade Zahl ihrer Punkte auf die verlängerten Dreiecksseiten fallen, so liegt, dem schon vorher erwähnten Elementarsatz zufolge, jede dieser Ternionen in gerader Linie.

e. Es liegen also in gerader Linie:

$$K',\; L',\; M'$$
$$K'',\; L,\; M'''$$
$$K''',\; L'',\; M$$
$$K,\; L''',\; M''$$

f. *Diese vier Geraden sind unter einander parallel.*

Denn aus 46, e wissen wir, dass

$K'L' \parallel K'''L''$, $L'M' \parallel L'''M''$, $M'K' \parallel M'''K''$, also, weil nach (a) $K'L' \parallel L'M' \parallel M'K'$, so muss auch $K'''L'' \parallel L'''M'' \parallel M'''K''$ sein, d. h. die drei Geraden $K'''L''M$, $L'''M''K$, $M'''K''L$ sind unter sich und mit $K'L'M'$ parallel.

48. Aus unserm früher (45) aufgestellten Werthverzeichniss ergiebt sich ferner:

$$AM : AM' = AM'' : AM'''$$

$$BK : BK' = BK'' : BK'''$$

$$CL : CL' = CL'' : CL'''$$

d. h. diejenigen vier Segmente, welche auf einer Dreiecksseite der Reihe nach durch ihren innern, ersten, zweiten und dritten äussern Entfernungsort von dem Endpunkt aus gerechnet abgeschnitten werden, mit dem sie an ihre Vorgängerinn angränzt, bilden eine geometrische Proportion.

49. Von den innern Entfernungsörtern wissen wir bereits, dass diejenigen Strecken derselben, welche zwischen den beiden nicht zugehörigen Seiten, oder, was hier dasselbe ist, zwischen den sie bestimmenden Punkten enthalten sind, eine besondere Aufmerksamkeit verdienen. Sehen wir daher jetzt zu, ob und in wiefern für die äussern Oerter Aehnliches Statt finde.

Um die nachfolgenden Entwickelungen nicht zu unterbrechen, bemerken wir zum Voraus, dass wir der nöthigen Kürze halber die Entfernungen des Mittelpunktes des äussern Kreises des Urdreiecks von den Mittelpunkten seines ersten, zweiten, dritten äussern Berührungskreises d. h. der an den äussern Flanken beziehungsweise der Seiten a, b und c liegenden Berührungskreise durch e', e'', e''' bezeichnen, und sie mit den Namen der ersten, zweiten und dritten äussern Excentricität belegen. Als bekannt werden angenommen die Beziehungen, denen zufolge ist:

$$e'^2 = R^2 + 2Rr', \quad e''^2 = R^2 + 2Rr'', \quad e'''^2 = R^2 + 2Rr'''$$

$$r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \text{ etc.}$$

In dem Dreieck $AH'I'$ (Fig. 4) ist nun offenbar:

$$\begin{aligned}\overline{H'I'}^2 &= (b + a)^2 + (c + a)^2 - 2(b + a)(c + a)\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A + 2a^2 + 2ab + 2ac - 2a(a + b + c)\cos A \\ &= a^2 + 2(a + b + c)a - 2(a + b + c)a\cos A \\ &= a^2 + 4(a + b + c)a\sin^2\frac{A}{2}, \quad \text{also}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{H'I'}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a + b + c}{a} 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 1 + \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} \cdot 4 \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 1 + \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \cdot 4 \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 1 + \frac{2r'}{R} = \frac{R^2 + 2Rr'}{R^2} = \frac{e'^2}{R^2}, \text{ mithin}$$

$$H'I' = \frac{e'}{R} \cdot a, \text{ und natürlich in ganz ähnlicher Weise:}$$

$$F'G' = \frac{e''}{R} \cdot b, \; D'E' = \frac{e'''}{R} \cdot c$$

d. h. das Rechteck aus einer Dreiecksseite und der zu ihr gehörigen äussern Excentricität ist gleich dem Rechteck aus derjenigen Strecke ihres Hauptortes, die zwischen den beiden nicht zugehörigen Seiten enthalten ist, und aus dem Radius vom äussern Kreise des Urdreiecks.

Anmerkung. Man sieht also, dass zur Bestimmung der in Rede stehenden Strecken unserer Hauptörter die äussern Excentricitäten des Urdreiecks in ganz ähnlicher Weise mitwirken wie die innere Excentricität bei der entsprechenden Bestimmung für die innern Oerter. Freilich wird gerade dadurch für die Hauptörter eine Eigenschaft, welche die innern Oerter besitzen, unmöglich gemacht. Da nämlich bei ungleichseitigen Dreiecken die äussern Excentricitäten nothwendig ungleich sind, so können $H'I'$, $F'G'$, $D'E'$ den zugehörigen Seiten nicht verhältnissgleich und das aus ihnen construierte Dreieck dem Urdreieck nicht ähnlich sein. Aber das weiss man, dass auch für die Hauptörter zur grössten Seite die grösste Strecke gehört. Denn diese Seite hat stets den grössten äussern Berührungskreis und darum auch die grösste äussere Excentricität, weil ja $e'^2 = R^2 + 2Rr'$ etc. ist.

50. Wenden wir uns nun mit unserer Untersuchung zu den Nebenörtern.

In dem Dreieck $BF'G$ ist:

$$\overline{F'G}^2 = (b + a)^2 + (b - c)^2 + 2(b + a)(b - c) \cos B$$

$$= a^2 + c^2 - 2ac \cos B + 2b^2 + 2ab - 2bc + 2(a + b - c) b \cos B$$

$$= b^2 + 2(a + b - c) b + 2(a + b - c) b \cos B, \text{ also auch}$$

$$\left(\frac{F'G}{b}\right)^2 = 1 + 4 \cdot \frac{a + b - c}{b} \cos^2 \frac{B}{2}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin B} \cos^2 \frac{B}{2}$$

$$= 1 + 8 \cdot \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \cos^2 \frac{B}{2}$$

$$= 1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{e'^2}{R^2}$$

also $\quad F'G = \frac{e'}{R} \cdot b$

Auf demselben Wege findet man:

$$D'E = \frac{e'}{R} \cdot c, \quad DE' = \frac{e''}{R} \cdot b, \quad H'I = \frac{e''}{R} \cdot a$$

$$HI' = \frac{e'''}{R} \cdot a, \quad FG' = \frac{e'''}{R} \cdot b$$

d. h. das Rechteck aus der zwischen den bestimmenden Punkten enthaltenen Strecke eines Nebenortes und aus dem Radius des äussern Kreises ist so gross als das Rechteck aus der äussern Excentricität der zugehörigen Seite und aus der Seite selbst, durch deren Abschneiden der Ort entstanden ist.

51. Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich sofort:

a. $H'I' : F'G : D'E = a : b : c$

$F'G' : DE' : H'I = b : c : a$

$D'E' : HI' : FG' = c : a : b$

d. h. diejenigen Strecken von drei äussern zu einerlei Dreiecksseite gehörigen Entfernungsörtern, von denen jedes durch die beiden den Ort bestimmenden Punkte begränzt wird, verhalten sich zu einander wie die Seiten, durch deren Abschneiden die Oerter entstanden sind.

Anmerkung. Was für die innern Entfernungsörter gilt, ist also auch für die äussern richtig, sobald sie zu derselben Dreiecksseite gehören.

b. Die aus $H'I'$, $F'G$, $D'E$, aus $F'G'$, DE', $H'I$ und aus $D'E'$, HI', FG' als Seitenlängen construierten Dreiecke sind unter sich, dem Urdreieck und dem aus DE, FG, HI beschriebenen Dreieck ähnlich.

c. Bezeichnet man das letztere der eben genannten Dreiecke durch $\mathfrak{D}$, die drei übrigen in derselben Reihenfolge, in welcher wir vorher (b) ihre Seiten namhaft gemacht haben, durch $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$, so ist

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{D}' : \mathfrak{D}'' : \mathfrak{D}''' = e^2 : e'^2 : e''^2 : e'''^2$$

d. h. diese vier Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Excentricitäten und mithin vier entsprechende Seiten unserer Dreiecke wie diese Excentricitäten selbst.

d. Aber nicht blos vier entsprechende Seiten unserer Dreiecke haben das genannte Verhältniss, sondern je vier durch diese Dreiecke vollkommen gleichmässig bestimmte

Gerade, also auch die Radien ihrer äussern Kreise. Bezeichnet man also diese Halbmesser durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, so ist

$$\mathfrak{R} : \mathfrak{R}' : \mathfrak{R}'' : \mathfrak{R}''' = e : e' : e'' : e'''$$

Nun wissen wir aber aus dem, was früher über die innern Entfernungsörter beigebracht ist, dass $\mathfrak{R} = e$, mithin muss nothwendig auch $\mathfrak{R}' = e'$, $\mathfrak{R}'' = e''$, $\mathfrak{R}''' = e'''$ sein.

d. h. *die Radien der Kreise um unsere vier Dreiecke sind einzeln gleich den vier Excentricitäten.*

c. Weil nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 = 12R^2, \text{ so ist also auch}$$

$$\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \mathfrak{R}''^2 + \mathfrak{R}'''^2 = 12R^2$$

d. h. die Quadratsumme der Radien der äussern Kreise unserer vier Dreiecke ist zwölfmal so gross als das Quadrat vom Radius des äussern Kreises vom Urdreieck.

f. Wie wir nun wissen, ist:

$$\triangle : \mathfrak{D} : \mathfrak{D}' : \mathfrak{D}'' : \mathfrak{D}''' = R^2 : e^2 : e'^2 : e''^2 : e'''^2, \text{ also auch}$$

$$\triangle : \mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = R^2 : e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2$$

$$= R^2 : 12R^2 = 1 : 12, \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = 12\triangle$$

also unsere vier Dreiecke zusammen sind zwölfmal so gross als das Urdreieck.

g. Weil

$$\triangle : \mathfrak{D} = R^2 : e^2, \text{ so ist auch}$$

$$\triangle - \mathfrak{D} : \triangle = R^2 - e^2 : R^2 = 2Rr : R^2$$

$$= \frac{2r}{R} : 1, \quad \text{also}$$

$$\triangle = \mathfrak{D} + \frac{2r}{R} . \triangle = \mathfrak{D} + 4\delta$$

wo δ seine bekannte Bedeutung als das durch die Berührungspunkte des innern Berührungskreises bestimmte Dreieck hat, während δ', δ'', δ''' dieselbe Bedeutung für den ersten, zweiten, dritten äussern Berührungskreis haben.

Auf dieselbe einfache Weise zeigt man, dass

$$\mathfrak{D}' = \triangle + 4\delta', \quad \mathfrak{D}'' = \triangle + 4\delta'', \quad \mathfrak{D}''' = \triangle + 4\delta'''$$

ist.

d. h. jedes unserer drei auf die äusseren Entfernungsörter sich beziehenden Dreiecke ist um den vierfachen Flächenraum des zugehörigen d. h. mit der den Radius des in Rede stehenden Dreiecks bildenden äussern Excentricität zu einerlei Dreiecksseite gehörigen äussern Berührungsdreiecks grösser als das Urdreieck; dagegen ist das Dreieck $\mathfrak{D}$ der innern Entfernungsörter um das Vierfache des innern Berührungsdreiecks kleiner als das Urdreieck

h. Endlich hat man auch noch, wie leicht zu sehen,

$$\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = 11\triangle + 4\delta \, .$$

52. Bezeichnen E, $E_{,}$, $E_{,,}$, $E_{,,,}$ die innern Excentricitäten unserer Dreiecke $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$, ferner E', $E'_{,}$, $E'_{,,}$, $E'_{,,,}$ die ersten äussern Excentricitäten etc., so ist:

$$\text{a.}\quad E^2 = e^2 - 2e \cdot \frac{e}{R} \cdot r$$

$$= e^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right) = e^2 \cdot \frac{e^2}{R^2}, \quad \text{also}$$

$$E = \frac{e^2}{R} = \frac{R^2 - 2Rr}{R} = R - 2r$$

d. h. *die innere Excentricität des von den zwischen ihren bestimmenden Punkten enthaltenen Strecken der innern Oerter gebildeten Dreiecks ist gleich dem Ueberschuss des Radius des äussern Kreises über den Durchmesser des innern im Urdreieck.*

Es ist ferner

$$\text{b.}\quad E'^2_{,} = e'^2 + 2e' \cdot \frac{e'}{R} \cdot r'$$

$$= e'^2 \left(1 + \frac{2r'}{R}\right) = e'^2 \cdot \frac{e'^2}{R^2}, \quad \text{also}$$

$$E'_{,} = \frac{e'^2}{R} = \frac{R^2 + 2Rr'}{R} = R + 2r'$$

und in ähnlicher Weise natürlich

$$E''_{,,} = R + 2r''$$

$$E'''_{,,,} = R + 2r'''$$

d. h. *in jedem der Dreiecke, welche von den drei äussern Oertern einer und derselben Dreiecksseite ganz eben so gebildet werden, wie das Dreieck* $\mathfrak{D}$ *von den innern gebildet wird, ist diejenige äussere Excentricität, welche einerlei Stellenzeiger mit dem Dreieck selbst hat, um den Durchmesser des mit eben diesem Stellenzeiger versehenen äussern Berührungskreises des Urdreiecks grösser als der Radius von dessen äusserm Kreise.*

c. Daher ist

$$\begin{aligned} E + E'_{,} + E''_{,,} + E'''_{,,,} &= 4R + 2(r' + r'' + r''' - r) \\ &= 4R + 8R, \text{ weil } r' + r'' + r''' = r + 4R \\ &= 12R \end{aligned}$$

d. h. *unsere vier Dreiecke* $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}'', \mathfrak{D}'''$ *sind so beschaffen, dass die innere Excentricität des ersten und diejenigen äussern der übrigen, welche einzeln mit den zugehörigen Dreiecken einerlei Stellenzeiger haben, zusammen zwölfmal so gross sind als der Radius vom äussern Kreise des Urdreiecks.*

d. Hieraus folgt in Verbindung mit 51, f, dass

$$R(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''') = (E + E'_{,} + E''_{,,} + E'''_{,,,})\,\Delta$$

e. Es ist:

$$\begin{aligned} E'^2 &= e^2 + 2e \cdot \frac{e}{R} \cdot r' \\ &= e^2 \left(1 + \frac{2r'}{R}\right) = \frac{e^2 \cdot e'^2}{R^2}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$E' = \frac{e}{R} \cdot e'$$

Andererseits ist auch

$$E_{,}^2 = e'^2 - 2e' \cdot \frac{e'}{R}\, r = e'^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right) = \frac{e'^2 \cdot e^2}{R}$$

also $\quad E_{,} = e' \cdot \frac{e}{R}$, und darum $E' = E_{,}$;

auf dieselbe Weise findet man, dass

$$E'' = E_{,,} \text{ und } E''' = E_{,,,}$$

d. h. *jede der äussern Excentricitäten des Dreiecks* $\mathfrak{D}$ *ist der innern Excentricität desjenigen unter den drei übrigen Dreiecken gleich, mit dem sie einerlei Stellenzeiger hat.*

53. Betrachtet man für die Dreiecke CDE, CD′E′, CD′E und CDE′ (Fig. 4) AB als Transversale, so hat man:

$$\begin{aligned} \text{a.}\quad & MD \,.\, AE \,.\, BC = ME \,.\, CA \,.\, BD \\ & M'D' \,.\, AE' \,.\, CB = M'E' \,.\, CA \,.\, BD' \\ & M''D \,.\, AE' \,.\, CB = M''E' \,.\, CA \,.\, BD \\ & M'''D' \,.\, AE \,.\, CB = M'''E \,.\, CA \,.\, BD', \end{aligned}$$

und darum auch:

$$MD : ME = M'D' : M'E' = M''D : M''E' = M'''D' : M'''E = b : a$$

und in ähnlicher Weise:

$$LG : LF = L'G' : L'F' = L''G : L''F' = L'''G' : L'''F = a : c$$

$$KH : KI = K'H' : K'I' = K''H : K''I' = K'''H' : K'''I = c : b$$

d. h. auf jedem der zwölf Entfernungsörter eines Dreiecks werden von dem Punkte aus gerechnet, in welchem er der Seite begegnet, durch deren Abschneiden er entstanden ist, durch die beiden andern Seiten Stücken abgeschnitten, die sich umgekehrt wie diese selbst verhalten; oder bei jedem Entfernungsort wird die zwischen seinen beiden bestimmenden Punkten enthaltene Strecke durch die dritte (diese Punkte nicht enthaltende) Seite in zwei Segmente getheilt, die sich umgekehrt wie die sie begränzenden Seiten verhalten.

b. Darum ist auch:

$$\begin{aligned} MC \,.\, LG \,.\, KH : ME \,.\, LF \,.\, KI &= M'D' \,.\, L'G' \,.\, K'H' : M'E' \,.\, L'F' \,.\, K'I' \\ &= M''D \,.\, L''G \,.\, K''H : M''E' \,.\, L''F' \,.\, K''I' \\ &= M'''D' \,.\, L'''G' \,.\, K'''H' : M'''E \,.\, L'''F \,.\, K'''I \\ &= abc : abc. \end{aligned}$$

d. h. für jede Ternion zu einerlei Classe gehöriger Entfernungsörter sind die beiden senkrechten Parallelepipeda, gebildet aus den Segmenten, welche von der Seite aus, durch die der Ort entstanden ist, das einemal durch ihre Nachfolgerin, das anderemal durch die Vorgängerin abgeschnitten werden, inhaltsgleich.

c. Wünschte man Ausdrücke für die absoluten Werthe unserer Segmente zu haben, so könnte man zu ihnen leicht auf folgende Art gelangen. Weil, wie wir bereits wissen,

$$a.\, M'D' = b.\, M'E' = b\left(M'D' + \frac{e'''}{R} \,.\, c\right),$$

so erhält man $\quad M'D' = \frac{b}{a-b} \cdot \frac{e'''}{R} \,.\, c \quad$ und

$$M'E' = \left(\frac{b}{a-b} + 1\right) . \frac{e'''}{R} c = \frac{a-b}{a} . \frac{e'''}{R} . c$$

und in ähnlicher Weise für die übrigen.

54. Was die Winkel anlangt, welche jede Ternion paralleler äusserer Oerter mit den Seiten des Urdreiecks bildet, so kann man sich zuvörderst leicht überzeugen, dass von den beiden, unter welchen ein Hauptort von der zugehörigen Seite geschnitten wird, derjenige der kleinere, also spitz sein muss, dessen Schenkel vom Scheitel aus nach dem Dreieck zu laufen, dass also die Winkel (Fig. 4) E'M'A, G'L'A und I'K'B spitze sind.

Denn ist, wie in unserer Figur 4, a die grösste, c die kleinste Seite, so ist, wenn $A\alpha \parallel D'E'$ gezogen wird,

$$\frac{CB}{BD'} > \frac{CA}{AE'}$$
$$> \frac{C\alpha}{\alpha D'}$$

also $CB > C\alpha$ d. h. α liegt von C aus gerechnet diesseit B, mithin convergiert AB mit D'E' in der Richtung von A nach B, oder die Seite c und ihr Hauptort schneiden sich in ihren über die grössere der nicht zugehörigen Seiten hinausgehenden Verlängerungen. Also ist nothwendig $AM' > AB$, und darum auch $AM' > AE'$, mithin AM'E' als Gegenwinkel einer der beiden kleinern Seiten des Dreiecks AM'E' ein spitzer. Aehnliches lässt sich für die beiden andern Hauptörter und ihre Seiten nachweisen. Diese spitzen Winkel verstehen wir, wenn wir in den nachfolgenden Erörterungen schlechthin von den Winkeln sprechen, welche die Dreiecksseiten mit ihren Hauptörtern bilden.

Bezeichnen wir nun der Kürze halber die Winkel, welche der erste Hauptort mit der ersten, zweiten, dritten Dreiecksseite bildet, beziehungsweise durch (1', 1), (1', 2), (1', 3) und so in ähnlicher Weise für die beiden andern Hauptörter, so ist, weil

$$M'E' : E'A = \sin A : \sin (3', 3),$$

$$\frac{a}{a-b} . \frac{e'''}{R} . c : c = \sin A : \sin (3', 3), \text{ also}$$

$$\text{a.} \quad \sin (3', 3) = \frac{a-b}{2 e'''},$$

und, wie hieraus von selbst folgt,

$$\sin (2', 2) = \frac{a-c}{2 e''}$$

$$\sin (1', 1) = \frac{b-c}{2 e'}$$

d. h. der Winkel, den ein Hauptort mit seiner Dreiecksseite bildet, ist so gross als derjenige Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks, das die doppelte äussere Excentricität dieser Seite zur Hypotenuse und den Unterschied der beiden andern Seiten zur Cathete hat, welcher dieser Cathete gegenüber liegt.

b. Haben (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1) etc. für die innern Oerter dieselbe Bedeutung, wie (1', 2) etc. für die äussern, so ist, wie wir bereits wissen,

$$\sin(1, 1) = \frac{b-c}{2e}$$

$$\sin(2, 2) = \frac{a-c}{2e}$$

$$\sin(3, 3) = \frac{a-b}{2e}, \quad \text{also}$$

$$\sin(1, 1) : \sin(1', 1) = e' : e$$

d. h. die Sinus der Winkel, welche eine Dreiecksseite mit ihrem Hauptort und innern Entfernungsort bildet, verhalten sich wie die innere Excentricität des Dreiecks zu der äussern der in Rede stehenden Seite.

c. Für die Winkel, welche ein Hauptort — und natürlich auch die ihm parallelen Nebenörter — mit nicht zugehörigen Seiten bilden, erhält man aus der Betrachtung des Dreiecks CD'E' ohne alle Schwierigkeit:

$$\sin(3', 1) = \frac{b+c}{2e'''}, \quad \sin(3', 2) = \frac{a+c}{2e'''},$$

und daher für die beiden andern Hauptörter:

$$\sin(2', 1) = \frac{b+c}{2e''}, \quad \sin(2', 3) = \frac{a+b}{2e''}$$

$$\sin(1', 2) = \frac{a+c}{2e'}, \quad \sin(1', 3) = \frac{a+b}{2e'}$$

d. h. die Sinus der Winkel, welche zwei Hauptörter mit der nicht zugehörigen Dreiecksseite bilden, verhalten sich umgekehrt wie die äussern Excentricitäten der zugehörigen Seiten.

55. Da, wie wir bereits wissen, die innern Entfernungsörter senkrecht auf der innern Excentricität stehen, so lässt sich mit Grund vermuthen, dass die drei Ternionen äusserer Oerter in ähnlicher Beziehung zu den drei äussern Excentricitäten stehen.

Um Gewissheit hierüber zu erlangen, sei (Fig. 3) M der Mittelpunkt des äussern Kreises, I'' der des zweiten äussern Berührungskreises, MH und I''Y senkrecht auf AC, MZ endlich || AC; nun ist nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke

$$CY = \frac{1}{2}(-a + b + c), \quad \text{also}$$

$$MZ = HY = \frac{1}{2} b - \frac{1}{2}(-a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}(a-c),$$

also

$$\sin MI''Z = \frac{MZ}{MI''} = \frac{a-c}{2e''} = \sin (2', 2) \ (54, a)$$

also $MI''Y = (2', 2) = AL'G'$, denn beide Winkel sind spitze, der erstere $MI''Z$ als Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks an dessen Hypotenuse, der andere $AL'G'$ nach dem, was in (54) nachgewiesen ist, mithin ist $\triangle XI''Y \backsim \triangle AL'\gamma$, also $MI''\gamma$ senkrecht auf $F'G'$. In ähnlicher Weise zeigt man dasselbe für die beiden andern Hauptörter. Also

die drei Ternionen paralleler äusserer Oerter stehen einzeln senkrecht auf den äussern Excentricitäten ihrer Seiten.

Anmerkung. Aus diesem Satze lassen sich eine Anzahl nützlicher Folgerungen ziehen, die wir aus Mangel an Raum übergehen müssen, die wir aber der Aufmerksamkeit unserer Leser empfehlen.

56. Bei den innern Entfernungsörtern haben wir für die Dreiecke, welche sie mit den nicht zugehörigen Seiten bilden, die bemerkenswetrhe Eigenschaft gefunden, dass die Radien ihrer äussern Kreise nicht nur unter sich, sondern auch mit der innern Excentricität von gleicher Grösse sind. Auch in dieser Beziehung gilt Aehnliches für die äussern Oerter.

Fragen wir zunächst nach dem Kreis um Dreieck $AH'I'$ (Fig. 4), so finden wir, nach bekannter Eigenschaft der Dreiecke, als Werthausdruck für seinen Radius

$$\frac{H'I'}{2 \sin A} = \frac{e'}{2R \sin A} \cdot a \ (49) = e'$$

Für das Dreieck $BF'G$ hat man in ähnlicher Weise

$$\frac{F'G}{2 \sin B} = \frac{e'}{2R \cdot \sin B} \cdot b \ (50) = e'$$

und für Dreieck $D'EC$

$$\frac{D'E}{2 \sin C} = \frac{e'}{2R \sin C} \cdot c = e'$$

Auf gleich einfache Weise lässt sich zeigen, dass die Kreise um die Dreiecke $BF'G'$, CDE', $AH'I$ zu ihren Radien die zweite äussere Excentricität und die Kreise um $CD'E'$, AHI', BFG' zu ihren Halbmessern die dritte äussere Excentricität haben. Wir sehen also, dass

die äussern Kreise derjenigen Dreiecke gleich sind, welche von drei äussern parallelen Oertern jeder mit den beiden zu seiner Gewinnung nicht verwendeten Dreiecksseiten bildet, und zwar dass der Radius dieser Kreise gleich ist der äussern Excentricität derjenigen Dreiecksseite, zu welcher die drei Oerter gehören.

Anmerkung. An die Stelle der einen Ternion gleicher Kreise bei den innern Oertern treten also für die äussern drei Ternionen, ganz in Uebereinstimmung mit dem, worauf wir früher (5, Anm. 2) hingewiesen haben

57. Aus dem vorigen Satze in Verbindung mit 51, d ergiebt sich sofort, dass jeder unserer vier Ternionen von Dreiecken mit gleichen äussern Kreisen sich noch ein viertes Dreieck zugesellt; der Ternion für die innern Entfernungsörter nämlich unser früheres Dreieck $\mathfrak{D}$, und denen für die äussern Oerter einzeln die Dreiecke $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$; unsere vier Ternionen erweitern sich also zu vier Quaternionen.

Anmerkung. Auf diese Kreise kommen wir später zur nähern Bestimmung der Lage ihrer Mittelpunkte und anderer Beziehungen noch einmal zurück.

58, Bei den äussern Entfernungsörtern verdienen noch eine besondere Beachtung die Dreiecke, welche bei den innern Oertern in Folge ihres Parallelismus gar nicht vorkommen können, also diejenigen, welche diese äussern Oerter unter einander bilden.

Fassen wir zunächst das von den drei Hauptörtern gebildete Dreieck $R'S'T'$ (Fig. 5) ins Auge.

Es seien μ', μ'', μ''' die Halbierungspunkte von $H'I'$, $F'G'$, $D'E'$; verbinde A sowohl mit μ'' als μ'''; alsdann ist

a. weil μ''' der Halbierungspunkt von $D'E'$ und A von EE', $A\mu''' \parallel D'E$, und aus gleichem Grunde $A\mu'' \parallel F'G$, also, weil $D'E \parallel F'G$ (5), bilden $A\mu''$ und $A\mu'''$ eine einzige gerade Linie, oder die Punkte μ'', A, μ''' liegen in gerader Linie; dasselbe gilt für die Punkte μ''', B, μ' und für μ', C, μ''.

d. h. *von den Halbierungspunkten der bestimmenden Strecken d. h. der zwischen den beiden den ganzen Ort bestimmenden Punkten enthaltenen Strecken der Hauptörter liegen je zwei mit einer der Ecken des Urdreiecks in gerader Linie, und zwar*

b. *ist es diejenige Ecke, welche den gemeinschaftlichen Endpunkt der beiden Dreiecksseiten bildet, zu denen die Oerter gehören, auf welchen sich die Punkte befinden.*

c. Da $D'E$ und $F'G$, wie wir wissen (5), parallel mit $H'I'$ sind, so ist auch $\mu''\mu''' \parallel H'I'$, und in ähnlicher Weise $\mu'\mu'' \parallel D'E'$, $\mu'\mu''' \parallel F'G'$.

d. Also $\triangle \mu'\mu''\mu''' \backsim \triangle R'S'T'$.

e. Da $\mu'S' \,\#\, \mu'''\mu'' \,\#\, \mu'T'$, so ist μ' der Halbierungspunkt von $S'T'$; ebenso μ'' der Halbierungspunkt $T'R'$ und μ''' von $R'S'$.

f. Also ist $\triangle R'S'T' = 4\triangle \mu'\mu''\mu'''$.

g. Da nach Voraussetzung $\mu'I' = \mu'H'$, und, wie vorhin gezeigt worden, $\mu'S' = \mu'T'$, so muss nothwendig auch $S'I' = T'H'$ und eben so für die beiden andern Hauptörter

$$F'T' = G'R' \text{ und } E'R' = D'S', \text{ und natürlich auch}$$

$$S'H' = T'I', \; T'G' = R'F', \; R'D' = S'E'$$

d. h. *auf jedem Hauptort werden von seinen beiden bestimmenden Punkten aus durch die beiden andern Hauptörter gleich grosse Strecken abgeschnitten.*

h. Da $D'E = 2\mu'''A$ und $F'G = 2A\mu''$, so ist

$$D'E + F'G = 2(\mu'''A + A\mu'') = S'T'$$

Und in gleicher Weise für die beiden andern Oerter

$$DE' + H'I = 2\mu'''\mu' = R'T'$$

$$HI' + FG' = 2\mu'\mu'' = R'S'$$

d. h. *die Strecke eines Hauptortes, welche durch die beiden andern begränzt wird, ist so gross als die zwischen den bestimmenden Punkten enthaltenen Strecken seiner beiden Nebenörter zusammen.*

i. Da nun, wie früher (50) nachgewiesen worden,

$$F'G = \frac{e_{\prime}}{R}\, b, \quad D'E = \frac{e'}{R}\, c, \quad \text{so ist}$$

$$S'T' = \frac{b+c}{R} \cdot e'$$

und in entsprechender Weise für die beiden andern Seiten unseres in Rede stehenden Dreiecks:

$$T'R' = \frac{a+c}{R} \cdot e'', \quad R'S' = \frac{a+b}{R} \cdot e'''$$

d. h. das Rechteck aus der Strecke eines Hauptortes, welche durch die beiden andern begränzt wird, und aus dem Radius vom äussern Kreis des Urdreiecks ist so gross als das Rechteck aus der zugehörigen äussern Excentricität und der Summe der beiden nicht zugehörigen Seiten.

k. Daher ist

$$2S'H' = 2T'I' = S'H' + I'T' = S'T' + H'I' = \frac{a+b+c}{R} \cdot e',$$

also $S'H' = T'I' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'$, und eben so

$$T'G' = F'R' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e''$$

$$R'D' = E'S' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'''$$

d. h. das Rechteck aus derjenigen Strecke eines Hauptortes, welche durch einen zweiten und die zu keinem dieser beiden gehörige Dreiecksseite begränzt wird, und aus dem Durchmesser des äussern Kreises ist so gross als das Rechteck aus der dem ersten Orte zugehörigen äussern Excentricität und aus dem Umfange des Dreiecks.

$$\text{I.} \quad T'H' = S'I' = H'S' - H'I' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e' - \frac{a}{R} \cdot e'$$

$$= \frac{-a+b+c}{2R} \cdot e'$$

eben so

$$T'F' = R'G' = \frac{a-b+c}{2R} \cdot e''$$

$$R'E' = S'D' = \frac{a+b-c}{2R} \cdot e'''$$

d. h. das Rechteck aus einem der beiden Segmente eines Hauptortes, welche von seinen bestimmenden Punkten aus einzeln durch den einen und andern der beiden übrigen Hauptörter so abgeschnitten werden, dass der abschneidende Ort zu derselben Dreiecksseite gehört, auf welcher der bestimmende Punkt liegt, von dem aus der Abschnitt gerechnet wird, und aus dem Durchmesser des äussern Kreises ist gleich dem Rechteck aus der mit dem erstern Ort zu einerlei Dreiecksseite gehörenden äussern Excentricität und aus dem Ueberschuss der beiden andern Dreiecksseiten über die so eben genannte.

59. Zieht man in unserm Dreieck $R'S'T'$ von R' aus eine Transversale durch A, $R'AX$, so wird, da $\mu''\mu'''$ die Gerade ist, welche die Halbierungspunkte der beiden Seiten $R'T'$ und $R'S'$ verbindet,

a. $R'X$ in A halbiert; daher ist

b. $S'X = 2\mu'''A = D'E$ und $T'X = 2\mu''A = F'G$

und eben so für die Transversale $S'BY$

$$T'Y = H'I \text{ und } R'Y = DE', \quad \text{so wie für } T'CZ$$

$$R'Z = FG' \text{ und } ZS' = HI'$$

d. h. zieht man in dem von den Hauptörtern gebildeten Dreieck die Ecktransversalen, durch welche der Durchschnittspunkt je zweier Hauptörter mit dem Durchschnittspunkt ihrer zugehörigen Seiten verbunden wird, so theilt jede die Gegenseite unseres Dreiecks in zwei Segmente, die den bestimmenden Strecken der Nebenörter der dritten Dreiecksseite gleich sind.

Anmerkung. Durch diese drei Ecktransversalen werden also in unserm Dreieck neben den bestimmenden Strecken der Hauptörter auch die der sämmtlichen Nebenörter zur Darstellung gebracht, so dass man sie für alle neun äussern Entfernungsörter beisammen hat.

c. Aus dem, was so eben bewiesen worden, folgt, dass

$$S'X : XT' = c : b, \quad T'Y : YR' = a : c, \quad R'Z : ZS' = b : a,$$

also $S'X \,.\, T'Y \,.\, R'Z = T'X \,.\, R'Y \,.\, S'Z$, ist;

darum müssen, weil die Punkte X, Y, Z sämmtlich auf den Dreiecksseiten selbst liegen, also alle drei Transversalen innerhalb des Dreiecks $R'S'T'$ fallen, diese einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

d. Einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke zufolge ergiebt sich nun hieraus weiter, dass auch die Transversalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben müssen, welche man durch die Punkte μ', μ'', μ''' einzeln parallel mit $R'X$, $S'Y$, $T'Z$ zieht.

e. Diese drei eben genannten Transversalen seien $\mu'\alpha$, $\mu''\beta$, $\mu'''\gamma$; der Halbierungspunkt von $\mu''\mu'''$ sei ν. Es ist nun

$$A\alpha = X\mu' = \tfrac{1}{2}(XT' - XS') = A\mu'' - A\mu''' = 2A\nu$$

also ν auch der Halbierungspunkt von $A\alpha$, also

$$A\mu''' = \alpha\mu'', \quad \text{und eben so}$$
$$B\mu''' = \beta\mu'$$
$$C\mu'' = \gamma\mu'$$

d. h. die Punktenpaare A und α, B und β, C und γ haben einzeln auf den Seiten $\mu''\mu'''$, $\mu'''\mu'$, $\mu'\mu''$ des Dreiecks $\mu'\mu''\mu'''$ eine solche Lage, dass der eine von dem einen Endpunkt derselben eben so weit entfernt ist wie der andere vom zweiten.

f. Da nun in jedem Dreieck aus einer Ternion in einem Punkte sich schneidender Ecktransversalen eine neue von derselben Beschaffenheit dadurch gewonnen werden kann, dass die Segmente jeder Seite unter einander vertauscht werden, dies aber in unserm Dreieck $\mu'\mu''\mu'''$ offenbar geschieht, wenn A mit α, B mit β, C mit γ vertauscht wird, so haben also auch die Ecktransversalen $\mu'A$, $\mu''B$ und $\mu'''C$ einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

g. Da es nun eine gleichfalls bekannte Eigenschaft dreier in Einem Punkte sich schneidender Ecktransversalen ist, dass das senkrechte Parallelepipedon aus drei von den durch sie gebildeten Seitensegmenten, welche keinen Endpunkt gemeinsam haben, so gross ist als das senkrechte Prisma, welches das durch die Fusspunkte der Transversalen bestimmte Dreieck zur Grundfläche und den Durchmesser vom äussern Kreis des Urdreiecks zur Höhe hat, so ist offenbar Dreieck $\alpha\beta\gamma$ gleichflächig mit dem Urdreieck.

h. Da nun aber die Dreiecke R'S'T' und $\mu'\mu''\mu'''$ einander ähnlich und die Ecktransversalen R'X etc. in dem einen genau so wie $\mu'\alpha$ etc. in dem andern d. h. so gezogen sind, dass durch je zwei sich entsprechende die Gegenseiten von zwei entsprechenden Endpunkten aus nach demselben Verhältniss getheilt werden, also

$$\frac{XS'}{XT'} = \frac{\mu''\alpha}{\mu'''\alpha} \text{ etc.}$$

so müssen offenbar die beiden Fusspunktdreiecke XYZ und $\alpha\beta\gamma$ dieselbe Beziehung zu einander haben wie die Dreiecke R'S'T' und $\mu'\mu''\mu'''$, denen die Transversalen angehören, selber; es muss also Dreieck XYZ viermal so gross als Dreieck $\alpha\beta\gamma$, und darum muss auch

$$\triangle XYZ = 4\triangle$$

d. h. *das Fusspunktdreieck unserer Ecktransversalen* R'X, S'Y, T'Z *ist viermal so gross als das Urdreieck.*

i. Zieht man die Ecktransversale $R'\alpha X'$, so ist, weil $\nu A = \nu\alpha$, auch $\mu'X = \mu'X'$, also $T'X' = S'X$, und eben so ist für die beiden andern Transversale $S'\beta Y$ und $T'\gamma Z'$, $T'Y' = R'Y$, $S'Z' = R'Z$; daher haben diese drei Transversalen nicht nur einen gemeinsamen Durchschnittspunkt, sondern auch ein Fusspunktdreieck X'Y'Z', welches dem Dreieck XYZ gleichflächig, mithin auch das Vierfache vom Urdreieck ABC.

k. Allein das Dreieck X'Y'Z' ist auch dem Urdreieck ähnlich, weil die einzelnen Seitenpaare beider einander parallel sind. So ist $X'Y' \parallel AB$; denn

$$T'X' = S'X = \frac{c}{R} \cdot e', \quad T'Y' = R'Y = \frac{c}{R} \cdot e'', \quad T'I' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e',$$

$$T'G' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'', \quad \text{also}$$

$$T'X' : T'Y' = e' : e'' = T'I' : T'G',$$

also $X'Y' \parallel I'G'$ und so für die beiden andern Seitenpaare.

l. Also ist jede Seite des Dreiecks X'Y'Z' doppelt so gross als die entsprechende Seite des Urdreiecks; daher $X'Y' = 2AB$, $Y'Z' = 2BC$, $Z'X' = 2CA$.

Anmerkung. Diesen letztern Satz kann man auch noch auf folgende Art beweisen. Es ist

$$X'Y' = \frac{T'X'}{T'I'} \cdot I'G' = \frac{\frac{e'}{R} \cdot c}{\frac{a+b+c}{2R} \cdot e'} \cdot (a+b+c) = 2c;$$

und ähnlich für die beiden andern Seiten.

60. Nach dem, was bereits im Eingange (4) erwiesen worden, ist das Dreieck R'S'T' und mit ihm natürlich auch $\mu'\mu''\mu'''$ ähnlich dem Fusspunkt-Dreieck der innern Winkelhalbierenden.

Da nun dieses letztere dem Urdreieck einbeschrieben, $\mu'\mu''\mu'''$ dagegen ihm unbeschrieben und zwar so, dass seine Seiten einzeln denen des einbeschriebenen parallel sind, so ist, einem bekannten Lehrsatz aus der Dreieckslehre zufolge, das Urdreieck die mittlere Proportionalfläche zwischen beiden Dreiecken. Bezeichnet nun t den Inhalt des Fusspunktdreiecks, so ist

a. $$\triangle \mu'\mu''\mu''' \,.\, t = \triangle^2, \quad \text{also}$$

$$\triangle R'S'T' \,.\, t = (2\triangle)^2$$

d. h. zwischen unserm Dreieck R'S'T' und dem Fusspunktdreieck der innern Winkelhalbierenden ist das doppelte Urdreieck die mittlere Proportionalfläche.

b. Wie bekannt, ist nun

$$t = \frac{abc}{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}\, 2\triangle; \quad \text{also muss}$$

$$\triangle R'S'T' = \frac{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}{abc} \,.\, 2\triangle$$

sein; d. h. das von den drei Hauptörtern gebildete Dreieck schliesst den doppelten Inhalt des Urdreiecks so oft in sich, so vielmal das senkrechte Parallelepipedon aus den Summen je zweier Seiten des Urdreiecks das aus den einfachen Seiten gebildete in sich schliesst.

c. Weil

$$\frac{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}{abc} = \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 1, \quad \text{so ist}$$

$$\triangle R'S'T' = \left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 1\right] 2\triangle,$$

und darum auch

$$\triangle R'S'T' + 2\triangle = (a+b+c)\left(\frac{2\triangle}{a}+\frac{2\triangle}{b}+\frac{2\triangle}{c}\right)$$

$$= (a+b+c)\,(h'+h''+h''')$$

d. h. *das aus den drei Hauptörtern gebildete Dreieck ist um das Zweifache des Urdreiecks kleiner als das Rechteck aus dem Umfange und aus der Höhensumme des Urdreiecks.*

d. Da einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke zufolge

$$abc = 4R\,.\,\triangle, \quad \text{also} \quad \frac{2\triangle}{abc} = \frac{1}{2R},$$

so folgt aus (b) unmittelbar, dass

$$\triangle R'S'T' = \frac{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}{2R}, \quad \text{also}$$

$$2R\,.\,\triangle R'S'T' = (a+b)\,(a+c)\,(b+c)$$

d. h. das Prisma, welches das aus den Hauptörtern gebildete Dreieck zur Grundfläche und den Durchmesser vom äussern Kreis des Urdreiecks zur Höhe hat, ist von gleichem Inhalt mit dem senkrechten Parallelepipedon aus den Summen je zweier Seiten des Urdreiecks.

e. Zieht man in unserm Dreieck $R'S'T'$ eine seitenhalbierende Ecktransversale z. B. $R'\mu'$ und bezeichnet die Punkte, in denen sie von den Nebenörtern $H'I$ und HI' geschnitten wird durch U und V, so ist

$$R'U = \frac{T'H'}{T'\mu'}\,.\,R'\mu', \quad R'V = \frac{S'I'}{S'\mu'}\,.\,R'\mu',$$

also, weil, wie wir wissen,

$$T'H' = S'I', \quad T'\mu' = S'\mu', \text{ ist } R'U = R'V$$

Es fallen also die Punkte U und V zusammen, es schneiden mithin diese beiden Nebenörter $R'\mu'$ in einerlei Punkt; und ähnlich ist es für die beiden andern Seitenhalbierenden $S'\mu''$ und $T'\mu'''$; also

schneiden sich je zwei solche Nebenörter, welche durch Abschneiden derselben Dreiecksseite entstehen, auf derjenigen seitenhalbierenden Ecktransversale des Dreiecks $R'S'T'$, welche von dem Durchschnittspunkt ihrer beiden Hauptörter ausläuft.

61. Wir wenden uns nun zu den von den Nebenörtern gebildeten Dreiecken.

Wir nennen (Fig. 6) das von den zweiten äussern Entfernungsörtern gebildete Dreieck $R''S''T''$, das von den dritten gebildete $R'''S'''T'''$.

a. Zuvörderst ist leicht zu sehen, dass wegen des Parallelismus je dreier zu einerlei Dreiecksseite gehöriger äusserer Entfernungsörter die beiden genannten Dreiecke nicht nur unter sich sondern auch dem von den Hauptörtern gebildeten ähnlich sind.

b. Unsere beiden von den Nebenörtern einerlei Classe gebildeten Dreiecke stehen aber in einer noch engern Beziehung zu einander. Denn aus dem, was wir bereits erwiesen haben, folgt, dass

$$\frac{F'R'}{T'R'} = \frac{a+b+c}{2(a+c)}, \quad \text{und}$$

$$\frac{R'E'}{R'S'} = \frac{a + b - c}{2(a + b)}, \quad \text{also}$$

$$F'm = \frac{F'R'}{T'R'} \cdot T'S' = \frac{a + b + c}{2(a + c)} \cdot \frac{b + c}{R} \cdot e' = \frac{a + b + c}{2R} \cdot \frac{b + c}{a + c} \cdot e'$$

und $$F'T'' = T'o = \frac{R'E'}{R'S'} \cdot T'S' = \frac{a + b - c}{2(a + b)} \cdot \frac{b + c}{R} \cdot e' = \frac{a + b - c}{2R} \cdot \frac{b + c}{a + b} \cdot e'$$

also $$T''m = F'm - F'T'' = \left(\frac{a + b + c}{a + c} - \frac{a + b - c}{a + b}\right) \cdot \frac{b + c}{2R} \cdot e'$$

$$= \frac{b(a + b) + c(a + c)}{(a + b)(a + c)} \cdot \frac{b + c}{2R} \cdot e'$$

Es ist ferner

$$D'n = \frac{R'D'}{R'S'} \cdot S'T' = \frac{a + b + c}{2R} \cdot \frac{b + c}{a + b} \cdot e'$$

$$D'S''' = S'p = \frac{R'G'}{R'T'} \cdot S'T' = \frac{a - b + c}{2R} \cdot \frac{b + c}{a + c} \cdot e', \quad \text{also}$$

$$S'''n = D'n - D'S''' = \left(\frac{a + b + c}{a + b} - \frac{a - b + c}{a + c}\right) \cdot \frac{b + c}{2R} \cdot e'$$

$$= \frac{c(a + c) + b(a + b)}{(a + b)(a + c)} \cdot \frac{b + c}{2R} \cdot e',$$

mithin $T''m = S'''n$, und darum auch, weil $T'''n = H'T' = I'S' = S''m$,

$$T''S'' = T'''S'''$$

also, da in unsern ähnlichen Dreiecken $R''S''T''$ und $R'''S'''T'''$ ein Paar entsprechender Seiten von gleicher Grösse, so

sind die beiden Dreiecke, von denen das eine durch die zweiten, das andere durch die dritten äussern Entfernungsörter gebildet wird, congruent.

c. *Daher sind die drei Geraden $R''R'''$, $S''S'''$, $T''T'''$ parallel und gleich.*

d. Verlängert man eine der eben genannten Geraden z. B. $T''T'''$ bis sie $R'S'$ oder deren Verlängerung in β schneidet, so ist, weil $E'T'' \parallel yT'''$,

$$E'\beta = \frac{E'T'' \cdot yE'}{yT''' - E'T''} \cdot \text{(A)}$$

Nun ist aber

$$E'T'' = E'o - T''o = \frac{S'E'}{S'R'} \cdot R'T' - F'T'$$

$$= \frac{a+b+c}{2R} \cdot \frac{a+c}{a+b} \cdot e'' - \frac{a-b+c}{2R} \cdot e''$$

$$= \frac{b(b+a)+c(c+a)}{a+b} \cdot \frac{e''}{2R}$$

$$yE' = S'y - S'E' = \frac{S'H'}{S'T'} \cdot S'R' - S'E' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot \frac{a+b}{b+c} \cdot e''' - \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'''$$

$$= \frac{a-c}{b+c} \cdot \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'''$$

$$yT''' = yH' - T'''H' = \frac{S'H'}{S'T'} \cdot T'R' - \frac{S'D'}{S'R'} \cdot T'R'$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{b+c} - \frac{a+b-c}{a+b}\right) \frac{a+c}{2R} \cdot e''$$

$$= \frac{a(b+a)+c(b+c)}{(a+b)(b+c)} \cdot \frac{a+c}{2R} \cdot e''$$

also,

$$yT''' - E'T'' = \frac{\left[a(b+a)+c(b+c)\right](a+c) - \left[b(b+a)+c(c+a)\right](b+c)}{(a+b)(b+c)} \cdot \frac{e''}{2R}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a+b+c)}{(a+b)(b+c)} \cdot \frac{e''}{2R}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b+c)}{b+c} \cdot \frac{e''}{2R}.$$

Substituiert man diese für $E'T''$, yE' und yT''' gefundenen Werthe in die Gleichung (A), so ergiebt sich

$$E'\beta = \frac{\left[b(b+a)+c(c+a)\right]}{a^2-b^2}(a-c) \cdot \frac{e'''}{2R}$$

Betrachtet man ferner die Gerade $ED\alpha$ als Transversale des Dreiecks $CD'E'$, so ist:

$$E'\alpha \,.\, CE = D'\alpha \,.\, CD; \quad \text{also}$$

$$(E'D' + D'\alpha)(b-c) = D\alpha'(a-c), \quad \text{und hieraus}$$

$$D'\alpha = \frac{b-c}{a-b} \cdot D'E' = \frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{c}{R} \cdot e''', \quad \text{also}$$

$$E'\alpha = \left(\frac{b-c}{a-b}+1\right)\frac{c}{R}\cdot e''' = \frac{a-c}{a-b}\cdot\frac{c}{R}\cdot e''';$$ mithin ist

$$\frac{E'\beta}{E'\alpha} = \frac{b(b+a)+c(c+a)}{2(a+b)c};$$

da aber, wie wir bereits wissen, $DE' = \frac{e}{R}\cdot e''$, so ist auch

$$\frac{E'T''}{E'D} = \frac{b(b+a)+c(c+a)}{2(a+b)c}, \quad \text{also} \quad \frac{E'\beta}{E'\alpha} = \frac{E'T''}{E'D},$$

folglich ist $ED\alpha \parallel T'''T''\beta$, und wir gelangen so zu dem bemerkenswerthen Satz: *Die drei Geraden, welche je zwei entsprechende Ecken der beiden congruenten Dreiecke verbinden, die einzeln aus den zweiten und aus den dritten äussern Entfernungsörtern gebildet werden, sind nicht nur unter sich sondern auch den innern Entfernungsörtern parallel.*

62. Wegen des Parallelismus je zweier entsprechender Seiten der ähnlichen Dreiecke $R'S'T'$ und $R''S''T''$ müssen, einem bekannten Elementarsatz zufolge, die drei Geraden $R'R''$, $S'S''$ und $T'T''$ einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben. Dasselbe gilt aus demselben Grunde von den drei Geraden $R'R'''$, $S'S'''$ und $T'T'''$. Der erstere dieser beiden Punkte heisse P (Fig. 6) der andere Q. Es ist nun aber offenbar

$$\frac{PR''}{PR'} = \frac{R''S''}{R'S'} = \frac{R'''S'''}{R'S'} = \frac{QR'''}{QR'},$$

mithin ist in dem Dreieck PQR' nothwendig

$$PQ \parallel R'''R'',$$

also, da, wie wir bereits bewiesen, $R''R''' \parallel ED\alpha$,

muss auch $PQ \parallel ED\alpha$ sein;

d. h. *unsere gemeinsamen Durchschnittspunkte* P *und* Q *haben stets eine solche Lage, dass die durch sie bestimmte Gerade den innern Entfernungsörtern parallel ist.*

63. Die Dreiecke $R''S''T''$ und $R'''S'''T'''$ sind unter den von den äussern Entfernungsörtern gebildeten nicht die einzigen, welche congruent sind, sondern sie theilen diese Eigenschaft mit mehreren andern.

So ist:

a. $\triangle S'H'y \cong \triangle T'I't$, weil $S'H' = T'I' = \frac{a+b+c}{2R}\cdot e'$

b. $\triangle F'R'm \cong \triangle G'T'p$, weil $F'R' = G'T' = \frac{a+b+c}{2R}\cdot e''$

c. $\triangle D'R'n \cong \triangle E'S'o$, weil $D'R' = E'S' = \frac{a+b+c}{2R} \cdot e'''$

d. $\triangle F'S''t \cong \triangle H'R'''p \cong \triangle vmy$, weil $F'S'' = H'p = vm$

$$= \frac{a(a+c)+b(c+b)}{a+c} \cdot \frac{e'}{2R}$$

e. $\triangle E'T''m \cong \triangle G'S'''n \cong \triangle opq$, weil $T''m = S'''n = op$

$$= \frac{b(a+b)+c(a+c)}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{b+c}{2R} \cdot e'$$

f. $\triangle D'T'''y \cong \triangle I'R''o \cong \triangle nrt$, weil $D'T''' = I'o = nr$

$$= \frac{a(b+a)+c(b+c)}{a+b} \cdot \frac{e'}{2R}$$

Anmerkung. Die Aehnlichkeit aller und die Congruenz mehrerer der von den äussern Entfernungsörtern gebildeten Dreiecke enthalten den Grund zu einer grösseren Zahl neuer Beziehungen, die wir aber, trotz des Interesses, welches einzelne gewähren, aus Mangel an Raum übergehen müssen und sie nur der Aufmerksamkeit unserer Leser zu eigner weiterer Verfolgung empfehlen können.

65. Was die Winkel betrifft, unter denen sich je zwei solche äussere Oerter, welche nicht parallel sind, einander schneiden, so müssen dieselben übereinstimmen mit denjenigen, welche die äussern Excentricitäten des Urdreiecks unter sich im Mittelpunkt des äussern Kreises bilden, weil diese Geraden, wie wir bereits aus (55) wissen, auf unsern Oertern senkrecht stehen. Um daher jene näher kennen zu lernen, wollen wir die Grösse dieser näher zu bestimmen suchen. Zu dem Ende sei m der Mittelpunkt des äussern Kreises und haben i' und i'' dieselbe Bedeutung für die zu den Seiten a und b gehörenden äussern Berührungskreise. Weil nun, bekannten Eigenschaften der Dreiecke zufolge,

$$\overline{i'i''}^2 = 16R^2 \cos^2\frac{C}{2}, \quad \overline{mi'}^2 = e'^2 = R^2 + 2Rr', \quad \overline{mi''}^2 = e''^2 = R^2 + 2Rr'',$$

und $r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$, $r'' = 4R \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$, so ist

$$\cos(180^0 - i'mi'') = \frac{\overline{i'i''}^2 - e'^2 - e''^2}{2e'e''} = \frac{8R^2\cos^2\frac{C}{2} - R^2 - R(r'+r'')}{e'e''}$$

$$= \frac{8R^2\cos^2\frac{C}{2} - R^2 - 4R^2\cos^2\frac{C}{2}}{e'e''}$$

$$= \frac{1+2\cos C}{\frac{e'}{R}\cdot\frac{e''}{R}}$$

also, wenn wir $180^0 - i'mi'' = \varphi$ setzen,

$$\sin^2 \varphi = 1 - \left(\frac{1 + 2 \cos C}{\frac{e'}{R} \cdot \frac{e''}{R}} \right)^2,$$

$$= \frac{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2} - (1 + 2 \cos C)^2}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{2r'}{R}\right)\left(1 + \frac{2r''}{R}\right) - (1 + 2 \cos C)^2}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{\left(1 + 8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)\left(1 + 8 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right) - (1 + 2 \cos C)^2}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{8 \cos^2 \frac{C}{2} + 64 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} - 8 \cos^2 \frac{C}{2} \cos C}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{16 \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{2} + 64 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{16 \cos^2 \frac{C}{2} \left(\cos^2 \frac{1}{2} (A + B) + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}\right)}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}$$

$$= \frac{16 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{1}{2} (A - B)}{\frac{e'^2}{R^2} \cdot \frac{e''^2}{R^2}}, \quad \text{also}$$

$$\sin \varphi = \frac{4 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)}{\frac{e'}{R} \cdot \frac{e''}{R}}$$

$$= \frac{2 (\sin A + \sin B)}{e' \ e''} \cdot R^2$$

$$= \frac{(a + b) R}{e' \cdot e''}$$

Weil nun, wie schon bemerkt, $\varphi = R'S'T'$, so ist

$$\sin R'T'S' = \frac{(a+b)\,R}{e'\,.\,e''}\,,\quad \text{und in ähnlicher Weise:}$$

$$\sin R'S'T' = \frac{(a+c)\,R}{e'\,.\,e'''}$$

$$\sin S'R'T' = \frac{(b+c)\,R}{e''\,.\,e'''}\,.$$

65. Bezeichnet D den Durchmesser des Kreises um das Dreieck $R'S'T'$, so ist

$$D = \frac{S'T'}{\sin S'R'T'} = \frac{\frac{b+c}{R}\,.\,e'}{\frac{(b+c)\,R}{e''e'''}} = \frac{e'\,.\,e''\,.\,e'''}{R^2}$$

also $$D\,.\,R^2 = e'\,.\,e''\,.\,e'''$$

d. h. der Kreis, der sich um das von den drei Hauptörtern gebildete Dreieck beschreiben lässt, ist von solcher Grösse, dass das durch seinen Durchmesser und das Quadrat vom Radius des äussern Kreises vom Urdreieck bestimmte senkreckte Parallelepipedon von gleichem Inhalt ist mit dem durch die drei äussern Excentricitäten bestimmten Parallelepipedon.

Zus. Unmittelbar aus dem vorstehenden Satz ergiebt sich auch die Beziehung

$$D = \frac{e'}{R}\,.\,\frac{e''}{R}\,.\,\frac{e'''}{R}\,.\,R.$$

Anmerkung. Aus diesem für D gefundenen Werthe lassen sich nun ohne Schwierigkeit auch Werthe für die Durchmesser der äussern Kreise herleiten, welche zu den übrigen von den äussern Entfernungsörtern gebildeten Dreiecken gehören, da bei der Aehnlichkeit aller dieser Dreiecke je zwei solche Durchmesser dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie ein Paar entsprechender Seiten der zugehörigen Dreiecke.

66. Wir wenden uns zur Betrachtung der einfachen Vierecke, welche von einem Entfernungsort, seiner zugehörigen Dreiecksseite und den zwischen beiden enthaltenen Segmenten der beiden andern Seiten gebildet werden. Jedes derselben kann betrachtet werden als das Aggregat zweier Dreiecke, von denen das eine das Urdreieck selbst und das andere von dem Entfernungsort mit den beiden nicht zugehörigen Dreiecksseiten gebildet wird. Diese Aggregate sind Unterschiede in allen den Fällen, wo die den Entfernungsort bestimmenden Punkte, wenn sie durch gleichmässiges, d. h. beidemal nach aussen oder beidemal nach innen hin vorgenommenes Abschneiden entstanden sind, auch Gleichmässigkeit in ihrer Lage zeigen, d. h. beide zugleich entweder auf den Seiten, denen sie angehören, selbst oder beide auf deren Verlängerungen liegen, und eben so bei ungleichmässigem Abschneiden Ungleichmässigkeit der Lage; eine Summe dagegen ist das Aggregat überall da, wo der entgegengesetzte Fall eintritt. Den Inhalt eines

solchen Aggregates nun bezeichnen wir in den Fällen, wo der zur Anwendung gekommene Entfernungsort der Seite a zugehört, durch F', $'F$, $,F$, $F,$ je nachdem dieser Ort der erste, oder zweite, oder dritte äussere, oder endlich der innere Ort dieser Seite ist; ähnliche Bedeutung haben für die Seiten b und c die Symbole F'', F''' etc.

a. Unmittelbar aus dem, was bereits früher (7) nachgewiesen, folgt, dass

$$2F' = (a+b+c)\ a \sin A, \quad 2F'' = (a+b+c)\ b \sin B, \quad 2F''' = (a+b+b)\ c \sin C$$
$$= (\sin A+\sin B+\sin C)\, a^2, \; 2F'' = (\sin A+\sin B+\sin C)\, b^2, \; 2F''' = (\sin A+\sin B+\sin C)\, c^2$$

b. Daher $\qquad F' : F'' : F''' = a^2 : b^2 : c^2$

d. h. die Flächenräume der drei Vierecke, welche von je einem Hauptort und den Seiten des Urdreiecks gebildet werden, verhalten sich wie die Quadrate der den Oertern zugehörigen Seiten.

c. $$F' + F'' + F''' = \tfrac{1}{2}\,(a+b+c)\,(a \sin A + b \sin B + c \sin C)$$
$$= (a+b+c)\ R\ (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= (a+b+c)\ (2R + \varrho),$$

da nach einer bekannten Eigenschaft der Dreiecke

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{2R + \varrho}{R}$$

ist, wenn ϱ den Radius des innern Berührungskreises vom Höhenfusspunktdreieck bezeichnet.

Also die drei von je einem Hauptort und den Dreiecksseiten gebildeten Vierecke sind zusammen so gross als ein Reckteck aus dem Umfange des Urdreiecks und dem um den Radius des innern Berührungskreises vom Höhenfusspunktdreieck vermehrten Durchmesser seines äussern Kreises.

d. Aus den bereits früher (7) entwickelten Ausdrücken ergiebt sich ferner:

$$2F' = (a+b+c)\ a \sin A$$
$$= (-a+b+c)\,.\,a \sin A + (a-b+c)\ a \sin A + (a+b-c)\ a \sin A$$
$$= 2F, + 2\,'''F + 2\,,,F, \quad \text{oder}$$
$$F' = '''F + ,,F + F,, \quad \text{und in ähnlicher Weise}$$
$$F'' = 'F + ,,,F + F,,$$
$$F''' = ''F + ,F + F'''$$

d. h. von den einfachen Vierecken, welche von den einzelnen Entfernungsörtern mit den Dreiecksseiten gebildet werden, ist jedes zu einem Hauptort gehörige so gross als drei zu Nichthauptörtern



gehörige zusammen, und zwar sind diese drei Oerter der innere, welcher mit dem in Rede stehenden Hauptort zu einerlei Dreiecksseite gehört, der erste Nebenort von deren Vorgängerin und der zweite ihrer Nachfolgerin.

e. Es ist:

$$'F + {}_{,,}F + F_{,,,} = \tfrac{1}{2}(a+b-c)(a \sin A + b \sin B + c \,.\, \sin C)$$
$$= R\,.\,(a+b-c)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= (a+b-c)(2R+\varrho), \text{ und in ähnlicher Weise}$$
$$''F + {}_{,,,}F + F_{,} = (-a+b+c)(2R+\varrho)$$
$$'''F + {}_{,}F + F_{,,} = (a-b+c)(2R+\varrho)$$

d. h. nimmt man für die Dreiecksseiten in einer ihrer geordneten Folgen einzeln den ersten Nebenort, den zweiten und den innern Ort, so ist die Summe der zu diesen gehörigen einfachen Vierecke so gross als das Rechteck aus dem Ueberschuss der Summe von den beiden den Nebenörtern zugehörigen Dreiecksseiten über die dritte und aus dem um den Radius des innern Kreises des Höhenfusspunktdreiecks vermehrten Durchmesser des äussern Kreises vom Urdreieck.

f. Zieht man in einem unserer zwölf einfachen Vierecke das ihm noch fehlende dritte Paar zugeordneter Seiten, so sind dieselben, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, mit zwei von den sechs Winkelhalbierenden des Urdreiecks parallel, und zwar in der Weise, dass beide zugleich zwei innern, oder zwei äussern oder die eine einer innern die andere einer äussern Winkelhalbierenden parallel ist, je nachdem das Viereck zu einem der Hauptörter, oder zu einem der innern Oerter oder zu einem der Nebenörter gehört.

g. Für die drei zu den Hauptörtern gehörigen einfachen Vierecke, also für F', F'', F''' bilden die Durchschnittspunkte α, β, γ (Fig. 7) der in Rede stehenden dritten Seitenpaare die Spitzen eines Dreiecks, welches dem Urdreieck congruent ist.

Denn $B\gamma$ und $C\beta$ sind nicht nur parallel sondern auch von gleicher Grösse, da sie beide gleich dem obern Abschnitt der von A ausgehenden innern Winkelhalbierenden sind, also, da $B\gamma \;\#\; C\beta$, auch $\beta\gamma \;\#\; CB$, und in ähnlicher Weise $\alpha\gamma \;\#\; AC$, $\alpha\beta \;\#\; AB$, also $\triangle\alpha\beta\gamma \cong \triangle ABC$.

h. Daher haben die durch die Punkte α, β, γ bestimmten Ecktransversalen des Dreiecks ABC einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, da je zwei der drei Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ als Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbieren, also je zwei durch den Halbierungspunkt der dritten gehen.

i. Darum ist die Quadratsumme der Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ so gross als die Quadratsumme der Seiten des Urdreiecks vermehrt um die Quadratsumme der obern Abschnitte seiner innern Winkelhalbierenden.

k. Ist O der Mittelpunkt des innern Kreises vom Urdreieck, so haben O und α als Gegenecken eines Parallelogramms gleiche Entfernung von dessen Digonale BC; dasselbe gilt von O und β in Beziehung auf CA, und von O und γ für AB.

d. h. die Punkte α, β, γ sind einzeln von den zugehörigen Seiten des Urdreiecks gleich weit entfernt und zwar um den Radius seines innern Berührungskreises.

l. Zieht man also durch unsere Punkte α, β, γ Gerade, welche einzeln parallel sind den Seiten a, b, c des Urdreiecks, so sind die Seiten des dadurch entstandenen Dreiecks QRS gleich weit entfernt von den ihnen parallelen Seiten des Urdreiecks und darum auch gleichweit entfernt von O; und zwar beträgt die letztere Entfernung das doppelte der erstern; mithin sind die innern Berührungskreise beider Dreiecke concentrisch, der eine viermal so gross als der andere, und darum auch Dreieck QRS bei seiner Aehnlichkeit mit dem Urdreieck das Vierfache des letztern, und daher jede seiner Seiten das Doppelte von der entsprechenden Seite des Urdreiecks.

m. Leicht folgt hieraus, das Q und A, R und B, S und C mit O in gerader Linie liegen; und zwar die Spitze des Urdreiecks mitten zwischen den beiden andern Punkten.

n. Weil als Gegenseiten in Parallelogrammen $R\alpha = BC = \alpha S$ etc. so sind unsre Punkte α, β, γ die Halbierungspunkte der Seiten des Dreiecks QRS.

o. Die aus α, β, γ auf BC, CA, AB gefällten Senkrechten haben also einen gemeinsamen Durchschnittspunkt — den Mittelpunkt des äussern Kreises vom Dreieck QRS.

p. Aber eben diese Senkrechten gehen auch einzeln durch die Mittelpunkte der äussern Berührungskreise des Urdreiecks. Denn weil $BOC\alpha$ ein Parallelogramm, so schneiden zwei Senkrechte von O und α auf BC die eine von B aus ein eben so grosses Segment ab als die andere von C aus, und darum muss, einem bekannten Elementarsatz zufolge, weil die eine Senkrechte durch O geht, die andere durch O′ den Mittelpunkt des zu BC gehörigen äussern Berührungskreises gehen.

q. Die Mittelpunkte M und N der äussern Kreise der Dreiecke ABC und QRS liegen mit O in gerader Linie und zwar so, dass MO = MN.

Denn nach bekannter Eigenschaft der Dreiecke ist: $N\hat{R}S = Q - 90^0 = A - 90^0 = M\hat{B}C$, also, da RS ‖ BC, auch RN ‖ BM, und darum müssen, weil so wohl RO = 2BO, als auch RN = 2BM, die Punkte O, M, N dergestalt in gerader Linie liegen, dass M der Halbierungspunkt von NO.

r. Die Spitzen unsres Dreiecks QRS bilden die Mittelpunkte der innern Berührungskreise für die Dreiecke AE′G′, BD′I′ und CF′H′, weil, wie bereits bewiesen, für das mit ABC congruente Dreieck AE′G′, AQ Winkelhalbierende und zwar AQ = AO etc.

s. Daher liegen sowohl G′ und Q als I′ und R mit O‴, dem Mittelpunkt des zur Seite c gehörigen äussern Berührungskreises, in gerader Linie, da ja, wie leicht zu sehen, O‴ zugleich Mittelpunkt des zur Seite AE′ gehörigen äussern Berührungskreises des Dreiecks AG′E′ ist und es sich ähnlich mit Dreieck BD′I′ verhält.

t. Das Dreieck O‴G′I′ ist, weil von den Winkeln bei G′ und I′ jeder die Hälfte von C ist, gleichschenkelig, mithin wird der Winkel an der Spitze O‴ durch die auf der Grundlinie senkrechte NγO‴ halbiert, und darum $N\hat{O}'''R = \frac{1}{2}(A + B)$.

Es ist ferner

$$N\hat{R}O''' = N\hat{R}S + S\hat{R}Q + Q\hat{R}O''' = A - 90^0 + B + \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(A + B),$$

also Dreieck NRO‴ gleichschenkelig, und muss daher die Peripherie des um QRS beschriebenen Kreises zugleich auch durch die Mittelpunkte der drei äussern Berührungskreise des Urdreiecks gehen.

u. Verlängert man die Geraden Aα, Bβ, Cγ bis zum Durchschnitt mit den Hauptörtern in den Punkten m, n, p, so ist, weil H′m . AC . BI′ = I′m . H′C . AB,

$$H'm : I'm = c : b, \quad \text{und in ähnlicher Weise}$$

$$G'n : F'n = a : c$$

$$D'p : E'p = b : a$$

d. h. die Transversalen Am, Bn, Cp theilen die zwischen ihren bestimmenden Punkten enthaltenen Strecken der Hauptörter in Segmente, die sich umgekehrt wie diejenigen Urdreiecksseiten verhalten, an deren Verlängerungen sie anliegen.

v. Daher ist

$$I'm = \frac{b}{b+c} \cdot \frac{e'}{R} \cdot a, \quad H'm = \frac{c}{b+c} \cdot \frac{e'}{R} \cdot a$$

und ähnliche Ausdrücke findet man für F′n, G′n etc.

w. Nach einer bekannten Eigenschaft geradliniger Dreiecke ist, wenn man drei Ecktransversalen zieht, die einen gemeinschaftlichen Durchchnittspunkt haben, das dreiseitige Prisma, welches das durch die Fusspunkte der Transversalen bestimmte Dreieck zur Grundfläche und den Durchmesser des Urdreiecks zur Höhe hat, von gleichem Inhalt mit dem senkrechten Parallelepipedon aus drei solchen durch die Transversalen gebildeten Seitensegmenten, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben; demgemäss ist für das Dreieck AH′I′, das zum Radius seines äussern Kreises e′ hat (56),

$$2e' \,.\, \triangle BCm = H'm \,.\, AC \,.\, BI'$$
$$= \frac{abc}{b + c} \,.\, \frac{e'}{R} \,.\, a,$$

und darum, weil, wie bekannt, $abc = 4R \,.\, \triangle$,

$$(b + c) \,.\, \triangle BCm = 2a \,.\, \triangle, \text{ und eben so}$$
$$(a + c) \quad \triangle ACn = 2b \,.\, \triangle$$
$$(a + b) \quad \triangle ABp = 2c \,.\, \triangle$$

x. Daher verhalten sich die zur gemeinsamen Grundlinie BC der Dreiecke BCm und BCA gehörigen Höhen, wie $2a : b + c$; und eben dieses Verhältniss haben die Segmente, in welche mA durch BC getheilt wird,

d. h. unsere Transversalen Am, Bn, Cp werden einzeln durch die Seiten des Urdreiecks, von deren Gegenecken sie auslaufen, so getheilt, dass das ausserhalb des Urdreiecks liegende Segment zu dem innerhalb liegenden sich verhält wie das Zweifache der theilenden Seite zur Summe der beiden andern.

67. Aber nicht blos die dritten zugeordneten Seitenpaare unserer einfachen Vierecke sind den Winkelhalbierenden des Urdreiecks parallel, sondern eben diese Eigenschaft haben auch diejenigen Geraden, welche man dadurch erhält, dass man in jedem unserer Vierecke, den Halbierungspunkt derjenigen Seite, welche durch den Entfernungsort selbst gebildet wird, mit dem Halbierungspunkt ihrer zugeordneten verbindet.

Denn wenn L und M (Fig. 8) die Halbierungspunkte der Seiten H'I' und BC unseres Vierecks F' sind, und man die die diese beiden Punkte verbindende Gerade verlängert bis zum Durchschnitt mit den beiden andern Dreiecksseiten in N und O, so ist einer schon wiederholt zur Anwendung gekommenen Eigenschaft der Dreiecke zufolge:

$$AN \,.\, I'O = AO \,.\, H'N \quad (1)$$
$$AN \,.\, BO = AO \,.\, CN \quad (2)$$

also auch
$$\frac{I'O}{BO} - 1 = \frac{H'N}{CN} - 1$$

das ist
$$\frac{BI'}{BO} = \frac{CH'}{CN},$$

also weil $BI' = CH'$, auch $BO = CN$, und darum auch wegen (2)
$$AN = AO$$

Anmerkung 1. Ganz ähnlich sind die Beweise für die übrigen Fälle und bedürfen daher keiner weitern Erörterung.

Anmerkung 2. Es ist leicht zu sehen, dass in unserm Beweise etwas Wesentliches nicht darauf ankommt, dass $H'C$ und $I'B$ gerade die Länge von BC, sondern blos darauf, dass sie überhaupt gleiche Länge haben. Man gewinnt hieraus den nützlichen und bisher zu wenig beachteten Lehrsatz: Verlängert man zwei Seiten eines Dreiecks über die dritte hinaus um beliebige aber gleich grosse Strecken und verbindet deren Endpunkte, so ist die Gerade, welche durch die Halbierungspunkte dieser Verbindenden und der dritten Seite bestimmt wird, parallel der den Gegenwinkel eben dieser Seite halbierenden Geraden.

Zus. Sind P und Q die Halbierungspunkte von CI' und BH', so bilden, nach einer bekannten Eigenschaft der Vierecke, die Punkte P, M, Q, C, die Ecken eines Parallelogramms und zwar in unserem Falle, wo $BI' = CH'$, eines Rhombus; PQ steht also senkrecht auf LM, und ist mithin parallel der zur Ecke A gehörigen äussern Winkelhalbierenden.

Anmerkung 3. Macht man also unsere zwölf einfachen Vierecke dadurch, dass man das dritte zugeordnete Seitenpaar zieht, zu vollständigen, so lassen sich in jedem derselben nicht eine sondern zwei Gerade von der in dem Hauptsatze näher bezeichneten Beschaffenheit erhalten, es giebt also zusammen 24 durch die Halbierungspunkte zugeordneter Seitenpaare bestimmte Gerade, von denen jede einer der sechs Winkelhalbierenden des Urdreiecks parallel ist.

68. Die zuletzt erwähnten Geraden haben manche bemerkenswerthe Eigenschaften, von denen wir einige angeben wollen:

a. Da, wie wir wissen,

$$AO = AN, \text{ und } BO = CN, \text{ so ist}$$
$$b - AO = c + AO, \text{ also}$$
$$AO = \tfrac{1}{2}(b - c)$$
$$BO = \tfrac{1}{2}(b - c) + c = \tfrac{1}{2}(b + c) = CN$$

d. h. zieht man durch den Halbierungspunkt einer Dreiecksseite eine Gerade parallel mit der zur Gegenecke gehörenden innern Winkelhalbierenden, so werden durch dieselbe auf den beiden andern Seiten sowohl von ihrem gemeinsamen Endpunkt als von den beiden nicht gemeinsamen Endpunkten aus gleiche Stücken abgeschnitten, und zwar sind die ersteren gleich dem halben Unterschied, die letzteren gleich der halben Summe der beiden andern Seiten.

b. Es ist (Fig. 8)

$$MN = \tfrac{1}{2} BE = c \,.\, \cos\frac{A}{2},$$

und in ähnlicher Weise

$$MO = \tfrac{1}{2} CG = b \,.\, \cos\frac{A}{2}$$

d. h. zieht man durch den Halbierungspunkt einer Dreiecksseite eine Gerade parallel mit der innern Winkelhalbierenden der Gegenecke, so ist die Strecke derselben, welche durch eine zweite Dreiecksseite begränzt wird so gross als die Orthogonalprojection der dritten Seite auf die genannte Winkelhalbierende.

c. Demgemäss ist für das Dreieck AHI'

$$LN = AI' \cos \frac{A}{2} = (a + c) \cos \frac{A}{2}, \quad \text{mithin}$$

$$LM = (a + c) \cos \frac{A}{2} - c \,.\, \cos \frac{A}{2} = a \cos \frac{A}{2}$$

d. h. hat ein Viereck drei gleiche Seiten, so ist die Orthogonalprojection jeder der beiden gleichen Gegenseiten auf die ihren Winkel Halbierende so gross als die Gerade, welche die Halbierungspunkte des andern Gegenseitenpaares verbindet.

d. Das aus den Geraden LM, MO, MN beschriebene Dreieck ist also dem Urdreieck ähnlich, und zwar ist, wenn t' seinen Inhalt bezeichnet,

$$t' = \cos^2 \frac{A}{2} \triangle$$

e. Haben t'' und t''' für den zweiten und driten Hauptort dieselbe Bedeutung, welche t' für den ersten hat, so ist

$$t' + t'' + t''' = \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) \triangle$$

$$= \frac{r + 4R}{2R} \,.\, \triangle, \quad \text{also}$$

$$2R\,(t' + t'' + t''') = (r' + r'' + r''') \triangle \,. \text{ (A. S. 798 Zus)}$$

f. Die Radien der äussern Kreise unserer Dreiecke t', t'', t''' haben die Werthe

$$R \cos \frac{A}{2}, \quad R \,.\, \cos \frac{B}{2}, \quad R \cos \frac{C}{2}$$

sind also viermal so klein als die Entfernungen je zweier Mittelpunkte der äussern Berührungskreise des Urdreiecks (A. S. 836).

g. Nach einer bekannten und in der Abhandlung über die innern Entfernungsörter (57, Anm. 1) näher erörterten Eigenschaft der Dreiecke haben in unsern Vierecken F', F'', F''' die drei Geraden, welche einzeln die Halbierungspunkte des Entfernungsortes und der zugehörigen Dreiecksseite verbinden, als den innern Winkelhalbierenden des Urdreiecks parallel, eben so wie diese einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt und zwar liegt derselbe mit dem Mittelpunkt des innern Kreises und dem Schwerpunkt dergestalt in gerader Linie, dass dieser letztere von ihm halb so weit entfernt ist als vom Mittelpunkt.

h. Ist S dieser gemeinsame Durchschnittspunkt, so ist MS halb so gross als der obere Abschnitt der von A auslaufenden innern Winkelhalbierenden, also auch gleich der Hälfte sowohl von $B\gamma$ als $C\beta$, mithin liegen, da $B\gamma \parallel MS \parallel C\beta$ nicht nur die Punkte B, S, β sondern auch C, S, γ in gerader Linie, es fällt also unser Punkt S zusammen mit dem schon früher (66) erwähnten gemeinsamen Durchschnittspunkt der Transversalen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.

69. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Geraden RT, welche durch die Halbierungspunkte P, Q der Diagonalen unseres Vierecks F′ bestimmt wird.

a. Von dieser Geraden haben wir bereits (67, Zus.) bewiesen, dass sie der durch A gehenden äussern Winkelhalbierenden parallel und somit, dass $AR = AT$ ist. Es lässt sich ferner ganz auf dieselbe Weise, die wir zu Anfang des vorigen Paragraphen für BO und CN etc. angewendet haben, zeigen, dass

$$BR = H'T \quad \text{und} \quad I'R = CT.$$

Demnach ist:

$$BR - I'R = H'T - I'R = H'A - I'A = b - c,$$

also, weil
$$BR + I'R = a,$$

$$BR = H'T = \tfrac{1}{2}(a + b - c) \text{ und}$$

$$CT = I'R = \tfrac{1}{2}(a - b + c),$$

d. h. unsere Gerade schneidet die Seiten BI′ und CH′ in den Berührungspunkten des zur Seite a gehörigen äussern Berührungskreises.

b. Daher ist

$$AR = AT = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

c. Da, wie bereits früher bemerkt, PLQM ein Rhombus und die eine seiner Diagonalen

$$LM = a \cos \frac{A}{2}$$

so ergiebt sich als Werth für die andere

$$PQ = a \sin \frac{A}{2}$$

d. Zieht man

$$CZ \parallel RT, \quad \text{so ist} \quad AC = AZ \quad \text{und} \quad CZ = 2\, b \sin \frac{A}{2},$$

also, da P Halbierungspunkt von CI′,

$$PR = \tfrac{1}{2}\, CZ = b \sin \frac{A}{2} \quad \text{und in ähnlicher Weise}$$

$$QT = c \,.\, \sin \frac{A}{2}$$

e. Das aus den Seitenlängen PQ, PR, QT construierte Dreieck, dass wir mit $'\mathfrak{t}$ bezeichnen wollen, ist daher auch dem Urdreieck so wie unsern in (68, e) betrachteten Dreiecken $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$, $\mathfrak{t}'''$ ähnlich, und zwar ist

$$'\mathfrak{t} = \sin^2 \frac{A}{2} . \Delta$$

f. Also

$$\mathfrak{t}' + '\mathfrak{t} = \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}\right) \Delta = \Delta$$

In gleicher Weise ist, wenn $''\mathfrak{t}$ und $'''\mathfrak{t}$ für den zweiten und dritten Hauptort dieselbe Bedeutung erhalten, wie $'\mathfrak{t}$ für den ersten,

$$\mathfrak{t}'' + ''\mathfrak{t} = \mathfrak{t}''' + '''\mathfrak{t} = \Delta .$$

g. Ist das Urdreieck in A rechtwinkelig, so ist

$$\mathfrak{t}' \cong '\mathfrak{t}$$

h. Ist $A = 60^0$, so ist

$$\mathfrak{t}' = 3\,'\mathfrak{t}$$

i. Aus bekannten den Schwerpunkt betreffenden Eigenschaften der Vierecke folgt, dass unsere Gerade LM hinreichend verlängert auch durch den Halbierungspunkt U von HI gehen und dass überdiess LM = MU sein muss,

d. h. die Halbierungspunkte der zwischen ihren bestimmenden Punkten enthaltenen Strecken eines Hauptortes und des mit ihm zu einerlei Dreiecksseite gehörigen innern Ortes liegen mit dem Halbierungspunkt ihrer Dreiecksseite in gerader Linie und zwar letzterer von beiden erstern gleich weit entfernt.

70. Verlängert man die Geraden, welche durch die Halbierungspunkte der Diagonalen in unsern Vierecken F', F'', F''' bestimmt werden, bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das so erhaltene Dreieck $\alpha\beta\gamma$, (Fig. 9) wie man ohne Schwierigkeit sieht, dem Dreieck ähnlich, welches die Mittelpunkte der drei äussern Berührungskreise zu seinen Ecken hat; seine Winkel sind also einzeln gleich den Hälften der Summen je zweier Winkel des Urdreiecks, und zwar ist

$$\beta\hat{\alpha}\gamma = \tfrac{1}{2}\,(B + C), \quad \alpha\hat{\beta}\gamma = \tfrac{1}{2}\,(A + C), \quad \alpha\hat{\gamma}\beta = \tfrac{1}{2}\,(A + B).$$

a. Ist nun O der Mittelpunkt des äussern Kreises unseres Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, und man zieht den Radius βO, so ist der Winkel $O\beta\alpha$, weil er, nach bekannter Eigenschaft der Dreiecke, das Complement zum Gegenwinkel der Seite $\alpha\beta$, also zu $\frac{1}{2}$ (A+B) bildet, gleich der Hälfte von C.

Da nun, wie wir bereits wissen,

$$CX = CY, \quad \text{also} \quad C\hat{Y}X = \tfrac{1}{2}(A+B),$$

so muss, wenn K den Durchschnittspunkt zwischen dem Radius $O\beta$ und der Seite AC bezeichnet, Dreieck βKY in K rechtwinkelig sein. Aehnliches lässt sich natürlich für die beiden andern Radien $O\alpha$, $O\gamma$ in Beziehung auf die Seiten BC und AB erweisen; also

die drei Radien des äussern Kreises vom Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welche durch dessen Ecken bestimmt werden, stehen einzeln auf den Seiten des Urdreiecks senkrecht.

b. Nach dem, was in dem vorigen Paragraph nachgewiesen worden, ist

$$CY' = AY = \tfrac{1}{2}(a-b+c), \quad BX = CX' = \tfrac{1}{2}(-a+b+c), \quad AZ' = BZ = \tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

d. h. je zwei Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ schneiden auf einer der Seiten des Urdreiecks, von dem einen und andern Endpunkt aus gerechnet, gleiche Segmente ab, und zwar auf derjenigen, auf welcher der durch die gemeinschaftliche Ecke eben dieser beiden Seiten bestimmte Radius vom äussern Kreise des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ senkrecht steht.

c. Daher ist

$$YY' = b + a - b + c = a + c \quad \text{und}$$

$$\beta Y = \frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}(A+C)} \,.\, YY' = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \,.\, (a+c), \quad \text{also}$$

$$KY = \beta Y \,.\, \sin \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \,.\, \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \,.\, 2R\,(\sin A + \sin C)$$

$$= 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \tfrac{1}{2}(A-C)$$

Nennt man nun K' den Fusspunkt des Höhenperpendikels von B auf AC, so ist

$$AK' = -c.\cos A, \quad \text{also}$$

$$K'Y = \tfrac{1}{2}(a-b+c) + c\,.\,\cos A = R(\sin A - \sin B + \sin C) + 2R \sin C \cos A$$

$$= 4R \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A\right)$$

Es ist aber

$$\cos \frac{C}{2} \cos A = \cos \frac{C}{2} \left(2\cos^2 \frac{A}{2} - 1\right) = 2\cos^2 \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \tfrac{1}{2}(A+B),$$

also $\cos\frac{C}{2}\cos A + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$= \cos\frac{A}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\tfrac{1}{2}(A+C)\right]$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}A \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(A-C,$$

mithin

$$K'Y = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\tfrac{1}{2}(A-C) = KY,$$

es fallen also die Punkte K und K' zusammen,

d. h. *die vorher* (a) *näher bezeichneten Radien des Kreises um Dreieck* $\alpha\beta\gamma$ *sind nicht blos senkrecht auf den einzelnen Seiten des Urdreiecks sondern gehen ausserdem auch durch die Gegenecken der Seiten, auf denen sie senkrecht stehen; der Mittelpunkt O dieses äussern Kreises fällt also zusammen mit dem Höhendurchschnitt des Urdreiecks.*

d. Verlängert man D'A bis zum Durchschnitt L mit $\alpha\gamma$ so ist $AL\alpha = 90^0$ weil die Schenkel dieses Winkels einzeln parallel sind den beiden durch B gehenden Winkelhalbierenden des Urdreiecks; es ist daher

$$AL = AZ' \,.\, \sin AZ'L = \tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(A+C)$$

$$= 4R \,.\, \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2},$$

und mithin

$$A\alpha = \frac{AL}{\sin A\alpha L} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = r'$$

und natürlich in ähnlicher Weise

$$B\beta = r'', \quad C\gamma = r'''$$

d. h. *die Ecken des Dreiecks* $\alpha\beta\gamma$ *sind einzeln von denjenigen Ecken des Urdreiecks, die mit ihnen und dem Mittelpunkt des Kreises um* $\alpha\beta\gamma$ *in gerader Linie liegen, um die Länge der Radien der äussern Berührungskreise des Urdreiecks entfernt.*

e. Es ist

$$O\alpha = A\alpha - AO$$

$$= r' - AO$$

$$= 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 2R\cos A$$

$$= 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 2R\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= 4R \sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right] + 2R$$

$$= 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2R = r + 2R$$

d. h. *der Radius des Kreises um Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist um den Radius des innern Berührungskreises des Urdreiecks grösser als der Durchmesser von dessen äussern Kreis.*

f. Da $$r + 2R = \frac{r + r + 4R}{2} = \frac{r + r' + r'' + r'''}{2}$$

so ist auch $$O\alpha = \frac{r + r' + r'' + r'''}{2}$$

d. h. *der Radius des äussern Kreises vom Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist gleich dem arithmetischen Mittel der Radien von den vier Berührungskreisen des Urdreiecks.*

Anmerkung. Zur Vollständigkeit der Untersuchung würde gehören, dass nun die den Nebenörtern zugehörigen Vierecke ähnlichen Betrachtungen unterworfen würden, wie es in dem Vorhergehenden mit den Vierecken der Hauptörter geschehen ist. Man dürfte sich zum Voraus überzeugt halten, dass diese Untersuchung zu manchem interessanten Resultat führen würde. Allein der Raum gestattet uns nicht, auf dieselbe einzugehen. Um so angelegentlicher empfehlen wir sie unsern Lesern zur eignen nähern Beachtung.

71. Der früher (57, Anm.) gegebenen Zusage gemäss, kommen wir noch einmal auf die Kreise zurück, die sich um die Dreiecke beschreiben lassen, welche die einzelnen Entfernungsörter mit den beiden nicht zugehörigen Seiten bilden, und namentlich ist es die Lage ihrer Mittelpunkte, die wir dabei ins Auge fassen, nachdem über die Grösse ihrer Radien das Nöthige bereits beigebracht ist. Diese Untersuchung kann aber nicht besser vorbereitet werden, als dass wir ein Paar Sätze aus der Kreislehre als Lehnsätze voraus schicken.

a. Verlängert man eine der äussern Winkelhalbierenden eines Dreiecks bis sie die Peripherie des äussern Kreises zum zweitenmal schneidet in L (Fig. 10), construiert für diese Strecke AL die Mittelsenkrechte NQ und beschreibt von einem beliebigen Punkt O dieser letztern als Mittelpunkt mit seiner Entfernung von einem der Endpunkte A, L der erstern einen Kreis, so sind von den beiden dem halbierten Aussenwinkel anliegenden Seiten diejenigen Segmente, welche zwischen ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten, B, C und zwischen den nicht gemeinschaftlichen Durchschnitsspunkten R, S mit der Peripherie des eben genannten Kreises enthalten sind, von gleicher Länge.

Denn wenn AD innere Winkelhalbierende ist, so steht sie auf der äussern AL senkrecht; es liegen also D und L mit dem Mittelpunkte M des äussern Kreises vom Urdreieck in gerader Linie, mithin ist, weil D der Halbierungspunkt des Bogens BDE, L der Halbierungspunkt von BAC, also ist $BL = CL$.

Da nun ferner $A\hat{B}L = A\hat{C}L$, $A\hat{R}L = A\hat{S}L$ und darum auch die Nebenwinkel dieser letztern BRL und CSL von gleicher Grösse, so sind die Dreiecke BRL und CSL congruent, also $BR = CS$.

b. Da auf unserer Mittelsenkrechten NQ der Mittelpunkt M des äussern Kreises vom Urdreieck liegt, so gehört auch dieser Kreis zu der Classe der in Rede stehenden, und zwar in sofern als die Segmente, welche durch seine Peripherie auf den Seiten BA und CA von den nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus abgeschnitten werden, gleich Null, also einander gleich sind.

c. In allen Fällen, wo der Mittelpunkt des neuen Kreises nicht mit M zusammenfällt, sind die beiden Segmente nicht gleich Null, und zwar ist, wie leicht zu erachten, die Länge derselben in der Hauptsache eine Function von der Entfernung der beiden Mittelpunkte O und M. Die Form dieser Function wollen wir näher zu bestimmen suchen. Zu dem Ende heisse d die Entfernung der Mittelpunkte O und M; MG und OK seien senkrecht auf AC, also GK die Orthogonalprojection von OM, mithin, da NQ parallel AD, und deshalb AC unter einem Winkel $= \frac{A}{2}$ schneidet, $KG = d \cdot \cos \frac{A}{2}$

Es ist aber

$$CS = AC - AS = 2AG - 2AK = 2KG,$$

und darum

$$BR = CS = 2d \cdot \cos \frac{A}{2}$$

d. h. die Länge jedes unserer beiden gleichen Seitensegmente beträgt das Doppelte der Orthogonalprojection von der Entfernung der beiden Mittelpunkte O und M auf eine der beiden Dreiecksseiten, denen diese Segmente angehören.

d. Aus dieser einfachen Form unserer Function ergiebt sich sofort, dass für die absolute Länge der Seitensegmente nichts darauf ankömmt, ob man auf der Mittelsenkrechten NQ den Mittelpunkt O in der Entfernung d von M aus nach der einen oder andern Richtung hin — in unserer Figur nach N oder Q hin — nimmt. Wenn also $MO' = MO$, so ist O' der Mittelpunkt eines zweiten Kreises, für welchen die Länge der gleichen Seitensegmente dieselbe ist wie für den Kreis, dessen Centrum O; und so gehören zu je zwei solchen Kreisen, deren Mittelpunkte von M aus nach der einen und andern Seite hin gleichweit entfernt sind, vier

Seitensegmente von einerlei Länge. Aber auch umgekehrt, gleiche Grösse der beiden Segmentenpaare zweier Kreise bedingt gleiche Entfernung ihrer Centra vom Mittelpunkt M.

Solche Kreise mögen zusammengehörige oder einander zugeordnete heissen.

e. Neben der Uebereinstimmung zweier zusammengehöriger Kreise zeigt sich aber auch eine Verschiedenheit, die sich in der Lage der Seitensegmente kundgiebt. Während für den einen Kreis die gleichen Segmente von den nicht gemeinschaftlichen Endpunkten der Seiten aus, zu denen sie gehören, gerechnet nach innen liegen, haben sie für den andern die entgegengesetzte Lage nach aussen. Ein solcher Gegensatz der Lage stellt sich in den Segmenten CS und CS′ (Fig. 10) heraus, von denen jenes zu dem Kreis um O, dieses zum Kreis um O′ gehört.

f. Fragt man, woran man bei zwei zusammengehörigen Kreisen erkenne, welchem von ihnen die innern und welchem die äussern Seitensegmente zugehören, so lässt sich darauf leicht antworten. Innere Segmente entstehen für jeden Kreis, dessen Mittelpunkt von M aus nach der Richtung hin genommen wird, nach welcher der Scheitel des halbierten Aussenwinkels liegt, äussere im entgegengesetzten Falle.

g. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich aus dem vorher (c) für die Länge der Seitensegmente gefundenen Werthausdruck, dass für verschiedene Kreise die Längen der zu ihnen gehörigen Seitensegmente sich eben so verhalten wie die Entfernungen ihrer Mittelpunkte von dem Mittelpunkt des äussern Kreises des Urdreiecks.

h. Verfährt man mit der innern Winkelhalbierenden eben so wie vorher mit der äussern, construiert man also für den Theil derselben AD (Fig. 10), welcher Sehne vom äussern Kreis des Urdreiecks ist, die Mittelsenkrechte XZ und von einem beliebigen Punkt P derselben als Mittelpunkt mit seiner Entfernung von A oder D als Radius einen Kreis, so sind auch jetzt von den beiden den halbierten Winkel einschliessenden Seiten diejenigen Segmente BT, CU, welche von den nicht gemeinsamen Endpunkten aus durch die nicht gemeinsamen Durchschnittspunkte zwischen unsern Seiten und der Kreisperipherie bestimmt werden, von gleicher Länge. Denn auf ganz ähnliche Weise wie in (a) lässt sich zeigen, dass BT und CU entsprechende Seiten congruenter Dreiecke sind.

i. Diese zweite Classe von Kreisen unterscheidet sich von der ersten durch die Ungleichmässigkeit, welche sich in der Lage je zweier zusammengehöriger Segmente zeigt; denn eines wie BT ist ein inneres, das andere wie CU ein äusseres, und zwar gehört letzteres derjenigen Dreiecksseite an, nach welcher hin von M aus der Mittelpunkt P des zugehörigen Kreises genommen ist. Auch bei dieser Classe von Kreisen wird, wenn P mit M zusammenfällt, die Segmentenlänge zu Null.

k. Durch ganz ähnliche Betrachtungen wie früher in (c) findet man, wenn δ die Entfernung der Mittelpunkte P und M bezeichnet,

$$BT = CU = 2\,\delta \sin \frac{A}{2}.$$

Also auch hier hängt die Segmentenlänge ausser der Grösse des Winkels A lediglich von der Grösse von δ ab.

l. Ist der halbierte Winkel A das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern Winkeln, also das Dreieck ein nach den Winkeln halb regelmässiges, so ist

$$BT = CU = \delta$$

d. h. dann ist die Segmentenlänge gerade so gross als die Entfernung der Mittelpunkte.

Anmerkung. Die beiden in (a) und (h) näher bezeichneten Lehrsätze finden sich, so viel mir bekannt, zur Zeit selbst in ausführlichen Lehr- und Handbüchern der Geometrie nicht. Sie verdienen aber wegen ihrer Nützlichkeit in dieselben aufgenommen zu werden. Ich empfehle sie daher zur näheren Beachtung.

72. Versuchen wir nun mit Hülfe der so eben entwickelten Sätze die nähere Bestimmung der Lage der Mittelpunkte von den Kreisen, welche sich um die von den einzelnen Entfernungsörtern mit den ihre beiden bestimmenden Punkte enthaltenden Dreiecksseiten gebildeten neuen Dreiecke beschreiben lassen.

Der nothwendigen Kürze halber mag jedes Dreieck dieser Art äusseres oder inneres heissen, je nachdem der dasselbe erzeugende Ort zu den äussern oder zu den innern gehört; die Mittelpunkte der äussern Dreiecke mögen kurzweg äussere und die der innern innere genannt werden; gleichnamig sollen je drei solche äussere Mittelpunkte heissen, wenn deren zugehörige Dreiecke von drei zu einerlei Seite des Urdreiecks gehörigen äussern Oertern gebildet werden.

Mittelpunktdreiecke sind alle diejenigen, welche durch irgend drei unserer Mittelpunkte als Spitzen bestimmt werden; ein solches Dreieck bekömmt den besondern Beinamen gleichnamig wenn die drei bestimmenden Centra gleichnamige sind. Aeusseres Mittelpunktdreieck soll insbesondere dasjenige genannt werden, dessen Spitzen die Mittelpunkte der Kreise sind, welche sich um die von den Hauptörtern gedildeten Dreiecke beschreiben lassen.

Zugeordnet nennen wir zwei Punkte in Beziehung auf einen dritten, wenn sie mit diesem in gerader Linie liegen und zwar dieser mitten zwischen ihnen. In unserer Figur 11 ist M der Mittelpunkt vom äussern Kreise des Urdreiecks; $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$ sind die drei innern Mittelpunkte; die übrigen neun bilden die äussern, und zwar M', 'M, ,M die gleichnamigen zur Seite a etc.

Ausserdem möge hier noch an die bekannten Beziehungen erinnert werden, denen zufolge, wenn AOQ, BOR, COS (Fig. 11) die drei innern Winkelhalbierenden des Urdreiks sind,

$$OQ = 2\,R\,\sin\frac{A}{2}\,,\quad OR = 2\,R\,\sin\frac{B}{2}\,,\quad QS = 2\,R\,\sin\frac{C}{2}$$

$$RS = 2\,R\,\cos\frac{A}{2}\,,\quad QS = 2\,R\,\cos\frac{B}{2}\,,\quad QR = 2\,R\,\cos\frac{C}{2}$$

a. Zuvörderst aber ist klar, dass zu den im vorigen Paragraph betrachteten Kreisen auch diejenigen gehören, deren Mittelpunkte ihrer Lage nach wir näher bestimmen wollen. Sie bilden offenbar die besondern Fälle, wo die zugehörigen Segmentenlängen den einzelnen Seiten des Urdreiecks gleich sind. So ist z. B. der Kreis um Dreieck CDE (Fig. 6) ein solcher, zu dem eine innere Segmentenlänge $= c$ gehört, während der Kreis um CD′E′ zwei eben so grosse aber äussere Segmente hat; dieselbe Segmentenlänge haben ferner auch die Kreise um CD′E und CDE′, nur dass die Segmente selbst ungleichartig sind, indem das eine ein äusseres, das andere ein inneres ist.

Hieraus folgt nun:

b. Die Mittelpunkte unserer sämmtlichen zwölf Kreise liegen auf den sechs Geraden, welche die Mittelsenkrechten für diejenigen Segmente der sechs Winkelhalbierenden des Urdreiecks bilden, die Sehnen seines äussern Kreises sind, also auf Geraden, welche diesen Winkelhalbierenden selbst parallel sind.

c. Insbesondere liegen die drei innern Mittelpunkte und von den äussern diejenigen, welche zu den von den Hauptörtern gebildeten Dreiecken gehören, auf den Mittelsenkrechten der drei äussern Winkelhalbierenden, die übrigen auf denen der innern.

d. Auf einer und derselben Mittelsenkrechten, also mit dem Mittelpunkte des äussern Kreises vom Urdreieck in gerader Linie, und zwar wegen 71, d in gleicher Entfernung von ihm, oder diesem zugeordnet liegen je zwei solche unserer Mittelpunkte, welche zu Kreisen gehören, deren Segmentenlängen einer und derselben Dreiecksseite gleich und wo beide Paare dieser Segmente zugleich entweder gleichartig (als äussere oder innere) oder ungleichartig sind. Einander zugeordnet sind demnach $M_{,}$ und M', $M_{,,}$ und M'', $M_{,,,}$ und M''', $'M$ und $_{,,,}M$, $''M$ und $_{,}M$, $'''M$ und $_{,,}M$.

e. Je zwei Paare zugeordneter Mittelpunkte bilden daher die Ecken eines Parallelogramms; es ist mithin jeder derselben von einem der ihm nicht zugeordneten eben so weit entfernt als die beiden noch übrigen von einander.

f. Hebt man bei drei Paaren zugeordneter Mittelpunkte drei einzelne dergestalt aus, dass keiner den beiden andern zugeordnet ist, so bilden sie die Spitzen eines Dreiecks, welches dem durch die drei übrigen bestimmten Dreiecke congruent ist.

Aehnliches gilt von vier, fünf, ja von allen sechs Paaren zugeordneter Mittelpunkte.

g. Fragt man, wie gross die Entfernung sei, in welcher sich die zu den einzelnen Paaren gehörigen Mittelpunkte vom Centrum des äussern Kreises unseres Urdreiecks befinden, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu einer Antwort durch die in 71, c und 71, k festgestellten Beziehungen.

Handelt es sich z. B. um die Mittelpunkte $M_,$ und M', so erhält man, weil die Segmentenlänge ihrer Kreise der Seite a des Urdreiecks gleich ist, aus 71, c unmittelbar

$$a = 2\,d \cos\frac{A}{2}, \quad \text{also auch}$$

$$4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} = 2\,d \cos\frac{A}{2}, \quad \text{mithin}$$

$$d = 2R \sin\frac{A}{2} \quad \text{oder}$$

$$MM_, = MM' = 2R \sin\frac{A}{2}$$

$$\text{und ähnlich} \quad MM_{,,} = MM'' = 2R \sin\frac{B}{2}$$

$$MM_{,,,} = MM''' = 2R \sin\frac{C}{2}\,.$$

Wendet man 71, k eben so auf die Kreise der von Nebenörtern gebildeten Dreiecke an, wie es so eben mit 71, c für die andern geschehen ist, so erhält man:

$${}'''MM = {}_{,,}MM = 2R \cos\frac{A}{2}$$

$${}'MM = {}_{,,,}MM = 2R \cos\frac{B}{2}$$

$${}''MM = {}_{,}MM = 2R \cos\frac{C}{2}$$

h. Hieraus folgt nun weiter, dass

$$MM_, = MM' = 2R \sin\frac{A}{2} = OQ,$$

also $\quad M_,M' = 2OQ = OO'$

und ähnlich $\quad M_{,,}M'' = OO'', \quad M_{,,,}M''' = OO'''$

Ferner $\quad {}'''MM = {}_{,,}MM = 2R \cos\frac{A}{2} = RS,$

also $\quad {}'''M_{,,}M = 2RS = O''O'''$ und dem entsprechend:

$${}'M_{,,,}M = 2QS = O'O'''$$

$${}''M_{,}M = 2QR = O'O''$$

d. h. *die Entfernungen von je zwei zugeordneten Mittelpunkten unserer zwölf Kreise sind einzeln den Entfernungen gleich, welche die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Urdreiecks unter einander haben.*

i. Da, wie wir bereits wissen, $MM' \parallel OQ$, so ist auch $OM_{,} \# QM$, und in ähnlicher Weise $OM_{,,} \parallel RM$, $OM_{,,,} \# SM$, also muss, weil $QM = RM = SM$ ist, auch $OM_{,} = OM_{,,} = OM_{,,,}$ sein,

d. h. *der Kreis um das innere Mittelpunktdreieck ist concentrisch mit dem innern Berührungskreise des Urdreiecks.*

k. Ohne alle Schwierigkeit sieht man, dass man den Mittelpunkt des Kreises um das äussere Mittelpunktdreieck $M'M''M'''$ erhält, wenn man zu dem Mittelpunkt des innern Berührungskreises vom Urdreieck den in Beziehung auf M zugeordneten nimmt, und dass darum dieser Kreis selbst von gleicher Grösse mit den Kreisen um das innere Mittelpunktdreieck und um das Urdreieck sein mus.

l. Da MQ als der Radius, welcher durch den Halbierungspunkt Q eines zu AB als Sehne gehörigen Bogen bestimmt wird, senkrecht auf der Sehne AB steht, so ist auch $M_{,}O$ senkrecht auf AB, und in entsprechender Weise $M_{,,}O$ auf AC, $M_{,,,}O$ auf AB, also

liegen die Spitzen des innern Mittelpunktdreiecks auf denjenigen drei Radien des innern Berührungskreises vom Urdreieck, welche durch die Berührungspunkte bestimmt werden, und zwar erhält man diese Spitzen wenn man jeden der genannten Radien über ihren gemeinsamen Endpunkt hinaus um die Länge des Radius vom äussern Kreise des Urdreiecks verlängert.

m. *Die Spitzen des in Rede stehenden Mittelpunktdreiecks sind also einzeln von den zugehörigen, d. h. von denjenigen Seiten des Urdreiecks, die ihnen ihren Namen gegeben haben, gleichweit entfernt und zwar um die Summe der Radien R und r.*

n. Aber nicht blos von den zugehörigen Seiten des Urdreiecks, sondern auch von deren Gegenecken haben die einzelnen Spitzen des mehrgenannten Mittelpunktdreiecks gleiche Entfernung; denn da in dem Viereck $AOMM_{,}$ ein Paar zugeordneter Seiten AO und $MM_{,}$ parallel, ein zweites Paar AM und $OM_{,}$ von gleicher Grösse, so ist dasselbe ein Antiparallelogramm, also auch $AM_{,} = OM$ und aus gleichem Grunde, $BM_{,,} = OM = CM_{,,,}$

d. h. *die Spitzen des innern Mittelpunktdreiecks sind einzeln von den Gegenecken der zugehörigen Seiten des Urdreiecks gleichweit entfernt und zwar um die Länge der innern Excentricität dieses Urdreiecks.*

Anmerkung. Diese Beziehung ergiebt sich auch unmittelbar aus dem, was im §. 28 der Untersuchung über die innern Entfernungsörter bewiesen ist.

o. Ganz ähnliche Beziehungen wie die für das innere Mittelpunktdreieck entwickelten gelten für die aus je drei gleichnamigen äussern Mittelpunkten gebildeten Dreiecke, also für ,M'MM'', ,,M''MM'' und ,,,M'''MM'''

Denn da, wie wir wissen, ,M''M ⧺ O'O'', nach bekannter Eigenschaft der Dreiecke aber V der Halbierungspunkt von O'O'', so ist auch ,MM ⧺ VO und darum MV ⧺ ,MO', und in ganz entsprechender Weise 'MO' ⧺ MU, M'O' ⧺ MQ,

d. h. *der Kreis um das aus den gleichnamigen äussern Mittelpunkten der Seite* a *gebildete Dreieck ist concentrisch mit dem zu eben dieser Seite gehörigen äussern Berührungskreis des Urdreiecks und von gleicher Grösse mit dem Kreise um dieses Urdreieck.*

p. Aehnliches gilt natürlich für die durch die gleichnamigen äussern Mittelpunkte der Seiten b und c bestimmten Dreiecke; also

fallen die Centra der Kreise um das innere und die drei gleichnamigen äussern Mittelpunktdreiecke einzeln zusammen mit den entsprechenden Mittelpunkten der vier Berührungskreise des Urdreiecks; die Kreise selbst sind unter sich und mit dem Kreis um das Urdreieck von gleicher Grösse.

q. Es ist, wie wir gesehen haben, O',M ∥ VM; aber VM muss, weil SC und CV auf einander senkrecht stehen, verlängert durch S gehen, also senkrecht auf AB sein; darum ist auch O',M senkrecht auf AB, und aus gleichem Grunde O'M' auf BC, so wie O''M auf AC.

Aehnliches und aus ähnlichen Gründen lässt sich für die beiden Dreiecke ,,M''MM'' und ,,,M'''MM''' nachweisen, also

die Spitzen jedes durch drei gleichnamige äussere Mittelpunkte bestimmten Dreiecks liegen auf denjenigen drei Radien des mit den Mittelpunkten zu einerlei Seite des Urdreiecks gehörigen äussern Berührungskreises, welche durch die Berührungspunkte bestimmt werden, und zwar erhält man diese Spitzen, wenn man auf jeder der drei genannten Ternionen von Radien von dem gemeinsamen Durchschnittspunkte jeder einzelnen aus Stücken abschneidet, welche gleich sind dem Halbmesser des Kreises um das Urdreieck.

r. Demnach sind die Mittelpunkte M', 'M, ,M einzeln von den Urdreiecksseiten a, b, c gleichweit entfernt und zwar um die Länge r' — R; dem entsprechend beträgt die Entfernung der Mittelpunkte M'', ''M, ,,M beziehungsweise von den Seiten b, c, a so viel als der Ueberschuss von r'' über R; den Werth r''' — R hat endlich die Entfernung der drei Mittelpunkte M''', '''M, ,,,M beziehungsweise von den Seiten c, a, b.

s. Aber nicht blos von den Seien des Urdreiecks sind unsere gleichnamigen äussern Mittelpunkte in der so eben näher angegebenen Weise gleichweit entfernt, sondern auch von deren Gegenecken.

Die Vierecke BM′MO′ und CM,MO′ sind Antiparallelogramme, weil in jedem ein Paar Gegenseiten parallel, ′MM ‖ BO′ und ,MM ‖ CO′, ein zweites Paar aber gleich, BM = O′M′ und CM = ,MO′, also auch ′MB = MO′ = ,MC; dass AM′ = O′M′, ist bereits bekannt; also M′A = ′MB = ,MC = e′; und natürlich M″B = ″MC = ,,MA = e″, so wie M‴C = ‴MA = ‴MB = e‴

d. h. *die Spitzen jedes gleichnamigen äussern Mittelpunktdreiecks sind einzeln von den Ecken des Urdreiecks gleich weit entfernt und zwar um die äussere Excentricität derjenigen Seite des Urdreiecks, zu welcher die Mittelpunkté gehören.*

t. Man kann inneres und äusseres Mittelpunktdreieck als einander zugeordnet betrachten, da je zwei ihrer entsprechenden Spitzen diese Eigenschaft haben; in gleicher Weise giebt es für jedes der drei gleichnamigen äussern Mittelpunktdreiecke ein zugeordnetes; es gehören in dieser Beziehung zusammen M′′M,M und M,″M,,,M, M″″M,,M und M,,‴M,M, M‴‴M,,,M und M,,,′M,,M.

Die Mittelpunkte der Kreise um je zwei zugeordnete Dreiecke sind, wie man ohne alle Schwierigkeit sieht und wie von einem Paare diess schon früher nachgewiesen ist, auch ihrerseits einander zugeordnet.

Es mögen diese den Punkten O, O′, O″, O‴ zugeordneten Punkte beziehungsweise durch ω, ω', ω'', ω''' bezeichnet werden. Was nun zuvörderst den Mittelpunkt ω anlangt, so müssen, weil Mω = MO, zwei Senkrechte, von ω und O auf BC gefällt, auf dieser Seite von ihrem Halbierungspunkt aus nach beiden Seiten hin gleiche Stücken abschneiden, also müssen nach bekannter Eigenschaft der Dreiecke die Fusspunkte der Senkrechten aus ω und O′ zusammenfallen; es liegt mithin der Mittelpunkt des äussern Mittelpunktdreiecks auf dem Berührungshalbmesser der Seite a des zu ihr gehörigen äussern Berührungskreises vom Urdreieck; auf ganz ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass für die Seiten b und c Aehnliches wie für a gelten d. h. dass ω auch auf den Berührungshalbmessern der Seiten b und c in den zu ihnen gehörigen äussern Berührungskreisen des Urdreiecks liegen müsse. Also kann ω kein anderer Punkt sein als der gemeinsame Durchschnitt der drei genannten Berührungshalbmesser und fällt mithin nach einem aus der Dreieckslehre bekannten Satze zusammen mit dem Mittelpunkte des Kreises um Dreieck O′O″O‴

Aehnliches gilt von den übrigen Mittelpunkten ω', ω'', ω'''. Denn ohne alle Schwierigkeit sieht man, dass ω'M,, ω',,,M, ω'″M gleich und beziehungsweise parallel sein müssen mit O′M′, O′′M und O′,M, also auch einzeln auf den Seiten a, b, c des Urdreiecks senkrecht stehen, wie wir es von O′M′, O′′M und O′,M bereits wissen; hieraus aber in Verbindung mit dem was wir bereits früher (q) erwiesen haben, folgt, dass ω'M, verlängert durch O, ω'″M durch O″ und ω',,,M durch O‴ gehen muss; es ist also ω', ganz ähnlich wie ω, der gemeinsame Durchschnitt dreier

Berührungshalbmesser, von denen einer dem innern, die beiden andern zwei äussern Berührungskreisen des Urdreiecks angehören. Dasselbe gilt natürlich von ω'' und ω'''.

Zugleich sehen wir, dass ω' auch Mittelpunkt des Kreises um Dreieck $0''00'''$ ist, und dass ω'' und ω''' in ähnlicher Beziehung zu den Dreiecken $0'00'''$ und $0'00''$ stehen.

u. Somit sind wir dahin gelangt, folgenden allgemeinen Satz aufstellen zu können: *Die sämmtlichen zwölf Mittelpunkte der Kreise um die Dreiecke, welche die zwölf Entfernungsörter einzeln mit den beiden Seiten des Urdreiecks bilden, die ihre bestimmenden Punkte enthalten, liegen auf den zwölf durch die Berührungspunkte bestimmten Halbmessern der vier Berührungskreise des Urdreiecks, und zwar dergestalt, dass bestimmte, gleichmässig aus ihnen gebildete Ternionen gleichweit — um den Radius des äussern Kreises vom Urdreieck — entfernt sind von den gemeinsamen Durchschnittspunkten einzelner Ternionen dieser Radien.*

Anmerkung. Die Untersuchung ist damit nicht völlig erschöpft, aber jedenfalls so weit geführt, dass die Leser sie leicht fortsetzen können. So ist es z. B. ungemein leicht, aus dem, was bereits nachgewiesen worden, herzuleiten, dass unsere öfters genannten Mittelpunktdreiecke einzeln congruent sind den Dreiecken, welche durch die Winkelhalbierenden AQ, BR, CS bestimmt werden, also den Dreiecken QRS, QOR, QOS, ROS.

73. Die äussern Entfernungsörter stimmen endlich auch in der Eigenschaft mit den innern überein, dass sie ihrer Natur als Entfernungsörter nicht verlustig gehen, wenn man sie sich, und zwar sich selbst parallel, fortbewegen lässt, oder mit andern Worten, dass jede beliebige in der Ebene eines Dreiecks mit einem seiner äussern Entfernungsörter parallel gezogene Gerade in der Hauptsache den Charakter dieses Entfernungsortes theilt.

Um sich von der Richtigkeit unserer Behauptung zu überzeugen sei XY (Fig. 12) eine beliebige mit dem äussern Entfernungsort D'E' der Seite c parallele Gerade, auf ihr N ein beliebiger Punkt, NK, NL, NO, NQ senkrecht beziehungsweise auf a, b, c und D'E'. Alsdann ist

$$\begin{aligned}(NK - NL + NO)\,c = BD'\,.\,NK - AE'\,.\,NL + AB\,.\,NO &= 2\triangle NBD' - 2\triangle NAE + 2\triangle NAB \\ &= 2\,ABD'E' - 2\triangle ND'E'\end{aligned}$$

also, wenn wir den Inhalt von ABD'E', wie schon früher, durch V', den des Dreiecks ND'E' durch $\mathfrak{T}$ bezeichnen,

$$NK - NL + NO = \frac{2(V' - \mathfrak{T})}{c}$$

Nun ändert aber offenbar dadurch, dass N beliebig auf XY fortrückt, nicht nur weder V' noch c seine Grösse, sondern auch nicht einmal das Dreieck ND'E', weil es, wie auch N auf XY sich verschieben möge, immer dieselbe Grundlinie und Höhe behält, folglich ist

$$\frac{2(V' - \mathfrak{T})}{c}$$

ein von der besondern Lage des Punktes N auf XY unabhängiger Grössenwerth, also auch das diesem Ausdruck gleiche Aggregat NK — NL + NO; die Gerade XY hat also den Charakter eines Entfernungsortes; und eben so ist es natürlich mit allen Geraden, die äussern Entfernungsörtern parallel sind.

Lage die Parallele XY von D′E′ aus, anstatt nach dem Dreieck hin, abwärts von diesem, so kehrte sich die Lage des Dreiecks ND′E′ um und damit das Vorzeichen, mit dem es in dem Werthausdruck für NK — NL + NO erscheint; man hätte also dann

$$NK - NL + NO = \frac{2(V' + \mathfrak{T})}{c}.$$

Bezeichnen wir nun, wenn NQ = d, ähnlich wie bei den innern Oertern eine Ternionlänge des neuen Ortes XY durch $\Sigma^{(c,-d)}p$, dagegen diese Länge für einen Ort, der eben so weit als XY von D′E′, aber nach der entgegengesetzten Seite hin, entfernt ist, durch $\Sigma^{(c,d)}p$, so haben wir allgemein

$$\Sigma^{(c,d)}p = \frac{2(V' + \mathfrak{T})}{c}, \text{ und } \Sigma^{(c,-d)}p = \frac{2(V' - \mathfrak{T})}{c}$$

oder, da $\frac{2V'}{c} = (a + b + c) \sin C$ und $\frac{2\mathfrak{T}}{c} = \frac{d \,.\, D'E'}{c} = \frac{e'''}{R} \,.\, d$,

$$\Sigma^{(c,d)}p = (a + b + c) \sin C + \frac{e'''}{R} \,.\, d \qquad (A)$$

$$\Sigma^{(c,-d)}p = (a + b + c) \sin C - \frac{e'''}{R} \,.\, d \qquad (B)$$

und natürlich entsprechende Ausdrücke für die übrigen Oerter.

74. Hieraus folgt nun:

a. Zieht man mit einem äussern Entfernungsort auf beiden Seiten und in gleicher Entfernung von ihm zwei Parallelen, so bildet zwischen den Ternionlängen dieser beiden abgeleiteten Entfernungsörter die des ursprünglichen das arithmetische Mittel.

b. Für denjenigen aus D′E′ abgeleiteten Entfernungsort, dessen Ternionlänge gleich Null, hat man $(a + b + c) \sin C = \frac{e'''}{R} \,.\, d$, und darum

$$d = \frac{a + b + c}{2e'''} \quad c$$

c. Nun ist aber leicht zu sehen, dass ein Punkt dieses abgeleiteten Entfernungsortes der Fusspunkt der zu A gehörigen innern Winkelhalbierenden ist; denn für denselben verschwindet die zu a gehörige Senkrechte, die zu den beiden andern Dreiecksseiten gehörigen sind gleich gross, aber von entgegengesetzten Vorzeichen. Einen zweiten Punkt unseres in Rede stehenden Ortes bildet aus den so eben angegebenen Gründen der Fusspunkt der zu B gehörigen innern Winkelhalbierenden; mithin bildet die diese beiden Fusspunkte verbindende Gerade unsern Entfernungsort. Es muss als die die Fusspunkte der zu A und B gehörigen inneren Winkelhalbierenden Verbindende von dem Hauptort der Seite c entfernt sein um die Länge der vierten Proportionale zur doppelten äussern Excentricität dieser Seite, zu ihr selbst und zum Umfang des Dreiecks.

Aehnliches gilt natürlich für die beiden andern Seiten des durch die Fusspunkte der innern Winkelhalbierenden bestimmten Dreiecks.

Anmerkung. Die Seiten dieses Dreiecks mit ihren unbegränzten Verlängerungen sind also für die äussern Entfernungsörter eben das, was die einzige Gerade, auf der sämmtliche Fusspunkte der äussern Winkelhalbierenden liegen, für die innern Entfernungsörter ist. Sie sind die Gränzörter und scheiden die Oerter mit additiven Ternionlängen von denen mit subtractiven.

d. Daher theilen die drei Geraden, welche durch die Fusspunkte von je zwei innern Winkelhalbierenden bestimmt werden, die Eigenschaft, nach welcher von je drei Senkrechten, die man von einem beliebigen Punkt einer von ihnen auf die Dreiecksseiten fällt, eine so gross ist, als die beiden andern zusammen.

e. Verlängert man eine unserer drei Geraden bis zum Durchschnitt mit derjenigen Seite des Urdreiecks, auf welcher keiner ihrer bestimmenden Punkte liegt, so verschwindet für diesen Durchschnittspunkt die eine von den seine Ternion bildenden Senkrechten; die beiden andern müssen also, damit das Aggregat den Werth Null habe, von gleicher Grösse, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sein. Dieser Punkt muss also einer der äussern Winkelhalbierenden des Urdreiecks angehören, und mithin derjenige sein, in welchem die in Rede stehende Dreiecksseite von der äussern Winkelhalbierenden ihrer Gegenecke geschnitten wird. Wir gewinnen so den Lehrsatz:

Halbiert man in einem ungleichseitigen Dreieck einen der Aussenwinkel und verbindet ausserdem die auf dessen Schenkeln liegenden Fusspunkte der innern Winkelhalbierenden, so liegt der Durchschnitt jener Halbierenden und dieser Verbindenden stets auf der dritten Dreiecksseite.

f. Demnach gehören die drei Punkte, in welchen die einzelnen Seiten des durch die Fusspunkte der innern Winkelhalbierenden bestimmten Dreiecks mit den nicht zugehörigen d. h. die bestimmenden Punkte nicht enthaltenden Seiten des Urdreiecks zusammentreffen, derselben geraden Linie an, auf welcher sich, wie man weiss, die Durchschnittspunkte der einzelnen äussern Winkelhalbierenden mit ihren Gegenseiten befinden.

g. Somit gewinnen wir den bemerkenswerthen Lehrsatz:

Die Durchschnittspunkte der einzelnen äussern Gränzörter mit den zu ihren ursprünglichen Oertern gehörigen Dreiecksseiten liegen auf einer Geraden, welche den innern Oertern parallel ist, und zwar den Gränzort derselben bildet.

h. Construiert man zu einem äussern Hauptort denjenigen abgeleiteten, der von ihm nach der einen Seite hin eben so weit entfernt ist als der Gränzort nach der andern, so ist jede Ternionlänge dieses Ortes doppelt so gross als die des Hauptortes.

i. Wenn man jeden von zwei solchen abgeleiteten Oertern desselben Hauptortes, welche sich auf beiden Seiten seines Gränzortes und zwar in gleicher Entfernung

von ihm befinden, eine Ternionlänge construiert, so ist von diesen sechs Senkrechten die Summe der an den additiven Flanken der Dreiecksseiten gelegenen so gross als die Summe der übrigen.

k. Jeder zu einem äussern Hauptort als abgeleiteter gehörige Ort ist vollkommen bestimmt durch seine Ternionlänge. Denn ist diese bekannt, so weiss man auch, ob sie grösser oder kleiner als die des Hauptortes ist, und weiss mithin, auf welcher Seite des Hauptortes der abgeleitete liegen müsse; aber man weiss auch ausserdem, wie weit nach dieser Richtung hin der abgeleitete Ort von seinem Hauptort entfernt ist, da aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen (A) und (B) sich ein bestimmter und bekannter Werth für d in allen den Fällen ergiebt, wo $\Sigma^{(c,\, d)} p$ oder $\Sigma^{(c, -d)} p$ bekannt ist.

Fragte man z. B. nach demjenigen abgeleiteten Ort der Seite c d. h. zu dem Hauptort dieser Seite gehörigen, dessen Ternionlänge so gross als die des innern Ortes eben dieser Seite ist, so muss derselbe vom Hauptort aus nach dem Dreieck hin und zwar in einer Entfernung liegen, welche bestimmt wird durch die Gleichung

$$d = \Big[(a + b + c) \sin C - (a + b - c) \sin C\Big] \frac{R}{e'''} = \frac{c^2}{e'''}$$

und welche mithin so gross ist als die dritte Proportionale zur äussern Excentricität von c und zu dieser Seite selbst.

l. Zieht man von einem Punkte einer Dreiecksseite aus zwei Gerade, die eine parallel mit dem äussern, die andere mit dem innern Entfernungsort dieser Seite, so haben diese beiden abgeleiteten Oerter offenbar durchweg gleiche Ternionlängen, da ja für ihren gemeinsamen Durchschnittspunkt dieselben zwei Senkrechten — die dritte verschwindet — und mit denselben Vorzeichen genommen es sind, durch welche die Ternionlänge des einen wie des andern Ortes bestimmt wird.

Umgekehrt müssen ein äusserer und ein zu derselben Dreiecksseite gehöriger innerer Entfernungsort, die beide einerlei Ternionlänge haben, seien sie beide abgeleitete oder nur einer, ihre zugehörige Dreiecksseite stets in einem und demselben Punkte schneiden. Denn könnten diese beiden Durchschnittspunkte verschieden sein, so müsste, wenn man durch den des äussern Ortes eine Gerade parallel mit dem innern zöge, diese als innerer Ort verschieden von unserm in Rede stehenden sein, und doch mit ihm einerlei Ternionlänge haben, weil ja beide, der eine nach Voraussetzung der andere nach Construction, dieselbe Ternionlänge wie der äussere Ort hätten, es müsste also zwei verschiedene innere Oerter von einerlei Ternionlänge geben, was, wie wir aus aus (k) wissen, unmöglich ist.

m. Hieraus ergiebt sich ein überaus einfaches Verfahren, zu jedem beliebigen äussern Entfernungsort denjenigen zu derselben Dreiecksseite gehörigen innern — und

umgekehrt — zu finden, welcher mit dem gegebenen einerlei Ternionlänge hat. Man verlängert nämlich den gegeben Ort bis zum Durchschnitt mit der zugehörigen Seite und zieht durch den so gewonnenen Punkt eine Gerade parallel mit dem innern Ort der genannten Seite.

n. Es ist also nichts leichter, als überall da, wo es bei Entfernungsörtern nur auf den Grössenwerth ihrer Ternionlängen ankömmt, äussere Oerter durch innere und umgekehrt diese durch jene zu ersetzen. So werden z. B. die drei Hauptörter durch innere ersetzt, indem man durch die Punkte, in denen sie von ihren zugehörigen Seiten geschnitten werden, Parallelen mit den zu den Seiten gehörigen innern Oertern zieht.

o. *Construiert man drei solche äussere Oerter, welche einerlei Ternionlänge haben, und verlängert jeden bis zum Durchschnitt mit seiner Dreiecksseite, so liegen diese drei Durchschnittspunkte stets in gerader Linie und zwar auf dem innern Entfernungsort, welcher eben diese Ternionlänge hat.*

Denn construiert man für jeden dieser drei Punkte seinen innern Entfernungsort, so sind deren Ternionlängen, als einzeln denen der drei in Rede stehenden äussern Oerter gleich, auch unter sich gleich, alle drei Oerter bilden also nur einen einzigen innern Ort, auf dem unsere drei Durchschnittspunkte liegen, und der natürlich für alle seine Punkte dieselbe Ternionlänge hat, welche den drei ihn bestimmenden Punkten zukommt.

Ein solcher Fall ist unter andern der, wo man die drei äussern Oerter construiert, welche durch den Mittelpunkt des innern Berührungskreises vom Urdreieck gehen. Da diese offenbar alle drei den Radius des genannten Kreises zur Ternionlänge haben, so liegen die Durchschnittspunkte zwischen ihnen und ihren Dreiecksseiten auf demjenigen innern Ort, der eben diese Ternionlänge hat.

Anmerkung 1. Dieser Satz ist, wie man leicht sieht, eine Verallgemeinerung des früher in (g) aufgestellten.

Anmerkung 2. Man kann also jeden innern Entfernungsort so ansehen, als sei er durch die äussern Entfernungsörter, welche mit ihm gleiche Ternionlänge haben, bestimmt worden.

75. Da durch die bisherigen Mittheilungen über die Entfernungsörter der Gegenstand wenigstens im Wesentlichen als erschöpft betrachtet werden kann, so schliesse ich dieselben. Indem ich mir für diesen zweiten Theil meiner Arbeit dieselbe gütige Nachsicht erbitte, welche sachkundige Männer dem ersten haben zu theil werden lassen, bemerke ich, dass ich inzwischen einer neuen Classe von Oertern auf die Spur gekommen bin, welche ich, so weit es meine beschränkte Zeit gestattet, weiter verfolgen und die gewonnenen Resultate bei sich darbietender Gelegenheit bekannt machen werde.

Druck von H. Sieling in Naumburg.